THESE

présentée à

L'UNIVERSITE PARIS VII

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

par

ALAIN HAURIE

JEUX COOPERATIFS suivi de COMMANDE OPTIMALE SUR UN HORIZON INFINI

Thèse soutenue le 5 avril 1976 devant la commission d'examen.

M. A. BLAQUIERE	Président
Mlle F. GERARD	Examinateur
Mlle H. BESTOUGEFF	Examinateur
M. P. VIDAL	Examinateur
M. P. FAURRE	Examinateur

J E U X C O O P E R A T I F S

SUIVI DE

C O M M A N D E O P T I M A L E S U R

U N H O R I Z O N I N F I N I

A. HAURIE

AVRIL 1975

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur le Professeur Blaquière qui m'a encouragé à entreprendre cette recherche et a bien voulu diriger cette thèse.

Je remercie également les membres du jury d'avoir bien voulu examiner mon travail.

A mes collègues, Michel Delfour, Jean Louis Goffin, Michel Polis, Pierre Yansouni et Nguyen Man Hung qui m'ont apporté leur soutien scientifique et moral, va ma profonde reconnaissance.

I am happy to have this opportunity to express my appreciation to Professor Leitmann, Professor Case and Professor Schmitendorf for their advices and comments.

TABLE DES MATIÈRES

PREFACE

PREMIERE PARTIE - JEUX COOPERATIFS

		PAGES
Chapitre 1:	Jeux coopératifs sous forme extensive et normale ou sous forme de fonction caractéristique.	I. 1
1.1	De la forme extensive à la forme normale.	I. 2
1.2	De la forme normale à la forme de fonction caractéristique.	I. 6
1.3	Le coeur d'un jeu sous forme de fonction caractéristique.	I. 8
1.4	Solution coopérative de Nash.	I. 9
1.5	Présentation des chapitre suivantes.	I.10
Chapitre 2:	Jeux coopératifs multi-étages.	I.12
2.1	Les règles du jeu.	I.13
2.2	Fonctions caractéristiques, coeurs du jeu et C-optimalité.	I.15
2.3	Liens avec la théorie de l'accessibilité des systèmes perturbés.	I.21
2.4	Quelques propriétés de fonctions caractéristiques des jeux séparables et des jeux linéaires-convexes.	I.28
2.5	Exemples.	I.33
2.6	Conclusion.	I.42
	Annexe 2.1	
	Annexe 2.2	
Chapitre 3:	Pareto-Optimalité pour des systèmes perturbés.	I.43
3.1	Solutions "Sup-Paréto-Optimales".	I.43
3.2	Processus de scalarisation.	I.45
3.3	Une règle des multiplicateurs de Lagrange.	I.52
3.4	Application au calcul de la fonction caractéristique d'un jeu sans paiements latéraux.	I.58
3.5	Conclusion.	I.61
	Annexe 3.1	
	Annexe 3.2	
	Annexe 3.3	

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 4: Sur l'application de la solution coopérative de Nash a un jeu différentiel. I.62

4.1 Les règles du jeu. I.62
4.2 Solution coopérative de Nash. I.65
4.3 Conditions nécessaires d'optimalité. I.66
4.4 Limites à l'applicabilité de ce concept de solution. I.70
4.5 Conclusion I.75

Annexe 4.1

Bibliographie

DEUXIEME PARTIE - COMMANDE OPTIMALE SUR UN HORIZON INFINI

Chapitre 1: Commande optimale sur un horizon infini et Théorie de la croissance économique. II. 1

1.1 Le modèle de Ramsey-Koopmans. II. 1
1.2 Un modèle de croissance économique avec contrôle de la population, effets de nuisance et ressources renouvelables et épuisables. II. 4
1.3 Présentation des chapitres suivants. II. 7

Chapitre 2: Notions d'optimalité sur un horizon infini et rappels sur le principe du maximum de Halkin. II. 8

2.1 Le système de commande. II. 8
2.2 F-optimalité et théorème du maximum. II. 9
2.3 I-optimalité. II.13
2.4 Conclusion. II.14

Chapitre 3: La propriété de Turnpike. II.15

3.1 Les hypothèses de base et le Lemme d'Atsumi. II.15
3.2 Un théorème de commandabilité. II.18
3.3 La propriété de Turnpike. II.24
3.4 Conclusion. II.30

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548118_0010

Chapitre 4: Convergence d'une trajectoire I-optimale vers un état extrémal stationnaire. Conditions suffisantes d'I-optimalité et théorème d'existence. II.31

4.1 Propriétés de convergence. II.32
4.2 Conditions suffisantes d'I-optimalité. II.34
4.3 Théorème d'existence d'une trajectoire I-optimale. II.37
4.4 Application à un modèle de croissance économique optimale. II.45
4.5 Conclusion. II.50

Annexe.

Bibliographie.

P R E F A C E

Certains aspects de la théorie économique peuvent bénéficier des progrès récents de l'automatique théorique. L'étude de certains processus de décisions économiques à un ou plusieurs agents, en particulier dans le contexte de la planification et de la croissance économique, a déjà été faite suivant le formalisme de la théorie de la commande optimale ou des jeux différentiels. Réciproquement, les phénomènes économiques peuvent susciter des développements nouveaux de l'automatique théorique. Le présent ouvrage est consacré à l'étude de deux problèmes inspirés par certains aspects de la théorie économique: les jeux coopératif dynamiques et la commande optimale des systèmes sur un horizon infini; elle comportera donc deux parties.

La première partie est consacrée à l'étude des jeux coopératifs dans un contexte dynamique. Depuis les travaux précurseurs de Ville[1] et de Von Neumann et O. Morgenstern[2] les liens entre la théorie économique et la théorie mathématique des jeux n'ont cessé de s'affirmer. En particulier les jeux coopératifs, où l'on étudie le type d'accord qui devrait résulter d'une entente entre tous les joueurs d'un jeu,

---

(1) J. Ville, (1938), sur la théorie générale des jeux où intervient l'habileté des joueurs, in E. Borel et al., Traité du calcul des probabilités et de ses applications. Applications des jeux de hasard, Vol iv, fac. 2, Gauthier-Villars, pp. 105-113.

(2) J. Von Neumann et O. Morgenstern (1944), Theory of games and economic behaviour, Princeton.

sont d'un grand intérêt. L'un des résultats les plus importants de l'économie théorique n'est-il pas cette relation entre les équilibres de marché et le coeur d'un jeu d'échange établie initialement par Debreu et Scarf[3]? Cependant les aspects dynamiques des jeux coopératifs n'ont reçu que peu d'attention jusqu'à présent; cela tient surtout au fait que les jeux coopératifs ont été étudiés sous leur forme normale ou de fonction caractéristique. Sous ces formes on fait abstraction des règles du jeu pour ne retenir que les aspects stratégiques, dans la forme normale, ou les puissances des diverses coalitions dans la forme de fonction caractéristique. Or la plupart des accords de coopération s'inscrivent dans un processus dynamique obéissant à des règles précises; pensons par exemple aux accords de limitation des armements ou de développement économique. Malheureusement, comme nous le montrerons au cours de cet ouvrage, les niveaux d'abstraction auxquels on se situe quand on définit le coeur d'un jeu ou la solution coopérative de Nash[4] peuvent rendre ces deux concepts de solution coopérative inopérants quand le jeu est de nature dynamique. Nous avons donc étudié en particulier ces aspects de la théorie des jeux quantitatifs en nous plaçant dans le cadre fourni par la théorie des jeux multi-étage ou différentiels. Les développements récents de l'automa-

---

(3) G. Debreu et H. Scarf (1963), A limit theorem on the core of an economy, International Economic Review, Vol 4, pp.235-246.

(4) J. Nash (1953), Two-person cooperative games, Econometrica, Vol 21, No 2, pp. 128-140.

tique théorique, la programmation dynamique et le principes du maximum surtout, ont permis d'étudier assez complètement ces types particuliers de jeux en restant au niveau des règles du jeu. Nous utiliserons donc cette voie et nous montrerons en particulier les liens qui existent entre la commande de systèmes perturbés et à critères de performance vectoriels et la définition ou le calcul de la fonction caractéristique d'un jeu.

La seconde partie est consacrée à la commande optimales d'un système sur un horizon de temps infini. De nombreux processus de décision économique se placent très naturellement sur un horizon infini. Dès qu'on considère une planification pour l'ensemble de l'économie, par exemple, il sera impossible de définir une fin prévisible au processus économique, et les générations présentes se doivent d'intégrer le bien être de toutes les générations futures dans leurs schémas de planification. Depuis Ramsey(5), les économistes ont donc pris l'habitude de traiter certains problèmes d'accumulation optimale de capital, ou d'autres ressources, comme des problèmes d'optimisation sur un intervalle de temps (ou horizon) infini. Jusqu'à tout récemment les résultats précis concernant ce type de problème ne concernaient que des sytèmes à une seule variable d'état. Cela était donc une sérieuse limitation. Des développements récents concernant des systèmes économiques multi-

(5) F.P. Ramsey (1928), A mathematical theory of saving, Economic Journal Vol. 38, pp. 543-559.

étages avaient établi une propriété dite du "Turnpike" montrant qu'une économie se développant de façon optimale sur un nombre fini d'étages tendait à se rapprocher d'un régime stationnaire extrémal convenablement défini. Plus récemment encore Halkin[6] définissait précisément le problème de commande optimale sur un horizon infini et établissait un principe du maximum analogue à celui de Pontryagin, si ce n'est que les conditions de transversalité n'y apparaissaient plus. La propriété du "Turnpike" suggère qu'une économie évoluant de façon optimale sur un horizon infini va tendre vers le régime stationnaire extrémal en question. Une telle propriété de convergence, si elle est assurée sous des conditions suffisamment générales, permet de palier à l'absence de conditions de transversalité dans le théorème du maximum d'Halkin. Notre étude s'est donc centrée sur ce problème. Nous l'avons posé comme un problème de commande optimale pour un système non linéaire et autonome obéissant cependant à un certain nombre d'hypothèses générales inspirées évidemment des modèles économiques de croissance optimale. Des résultats d'une assez grande généralité concernant la commandabilité du système, la propriété de "Turnpike" et la convergence vers un régime stationnaire extrémal ont pu alors être établis.

---

(6) H. Halkin (1972), Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons, CORE Papers no 7210, aussi dans Econométrica Vol. 42, no 2, (1974), pp. 267-273.

N.B. Certains des résultats présentés dans cet ouvrage ont déjà été publiés par l'auteur dans des revues spécialisées ou des comptes-rendus de conférences.
Les annexes à la fin de chaque chapitre contiennent des copies de ces publications.

PREMIERE PARTIE

JEUX COOPERATIFS

CHAPITRE 1: JEUX COOPERATIFS SOUS FORME EXTENSIVE ET NORMALE OU SOUS FORME DE FONCTION CARACTERISTIQUE

Plan: 1.1 De la forme extensive à la forme normale.

1.2 De la forme normale à la forme de fonction caractéristique.

1.3 Le coeur d'un jeu sous forme de fonction caractéristique.

1.4 Solution coopérative de Nash.

1.5 Présentation des chapitres suivants.

Introduction

Dans ce chapitre nous rappellerons succintement quelques aspects bien connus de la théorie générale des jeux à m joueurs en vue de présenter dans un cadre général la contribution apportée par les chapitres 2 à 4. Tout d'abord nous montrerons que les jeux multi-étages ou les jeux différentiels peuvent être considérés comme des adaptations du concept de jeu défini sous forme extensive. Nous rappellerons ensuite la façon dont les notions de jeu sous forme normale puis de jeu sous forme de fonction caractéristique ont été introduites. Dans le contexte plus particulier des jeux coopératifs nous présenterons les deux concepts qui feront l'objet de notre étude par la suite: le coeur du jeu et la solution coopérative de Nash. Une présentation des résultats obtenus dans les chapitres suivants sera alors faite.

1.1. De la forme extensive à la forme normale

Rappelons la définition donnée par Berge (1957).

Définition 1.1: Soit $M \triangleq \{1,2,\ldots,m\}$, m entier, l'ensemble des joueurs et X un ensemble avec une partition $\{X_0,X_1,X_2,\ldots,X_m\}$. On dira que l'on a un *jeu sous forme extensive* sur cette partition si l'on définit:

(i) une application $\Gamma : X \to P[X]$ telle que:

$$X_0 = \{x \in X : \Gamma(x) = \emptyset\};$$

(ii) pour tout $j \in M$ une famille $\mathcal{U}_j \triangleq \{U,V,\ldots\}$ de sous-ensembles de X_j recouvrant X_j et appelée *structure d'information pour le joueur* j; si $U \in \mathcal{U}_j$ on dira que U est un *ensemble d'information* de j, pour tout x dans U on suppose que $\Gamma(x)$ a la même cardinalité;

(iii) pour tout U une famille $\nu_U \triangleq \{\nu_h : h \in H_U\}$ d'applications univoques de U dans X telles que si $x \in U$ on ait:

a) $h \neq k$, $h,k \in H_U \Rightarrow \nu_h(x) \neq \nu_k(x)$,

b) $\{\nu_h(x) : h \in H_U\} = \Gamma(x)$.

(iv) pour tout $j \in M$ une fonction réelle:

$$\phi_j : X_0 \to R$$

définissant le coût pour le joueur j. ■

Nous avons quelque peu modifié la définition originale de Berge pour y éliminer toute référence aux aspects stochastiques que nous éviterons systématiquement de considérer dans cet ouvrage. Nous avons aussi défini un coût seulement sur le sous-ensemble X_0.

Enfin, et surtout, nous n'avons pas défini une structure d'infor-

mation $\mathcal{U}_j$ comme une *partition* de X_j mais plutôt comme un *recouvrement* de X_j par une famille de ses sous-ensembles.

La partie s'effectue de la façon suivante. Soit une position initiale $x^i \in X$. Si on a:

$$x^i \in U \in \mathcal{U}_j$$

c'est le *joueur* j *qui a le trait* cependant le joueur j ne connait pas la *position* x^i mais seulement l'ensemble d'information $U \ni x^i$. Le joueur j choisit alors dans H_U un index h^i qui déterminera une position du jeu:

$$x^{i+1} = \nu_{h^i}(x^i).$$

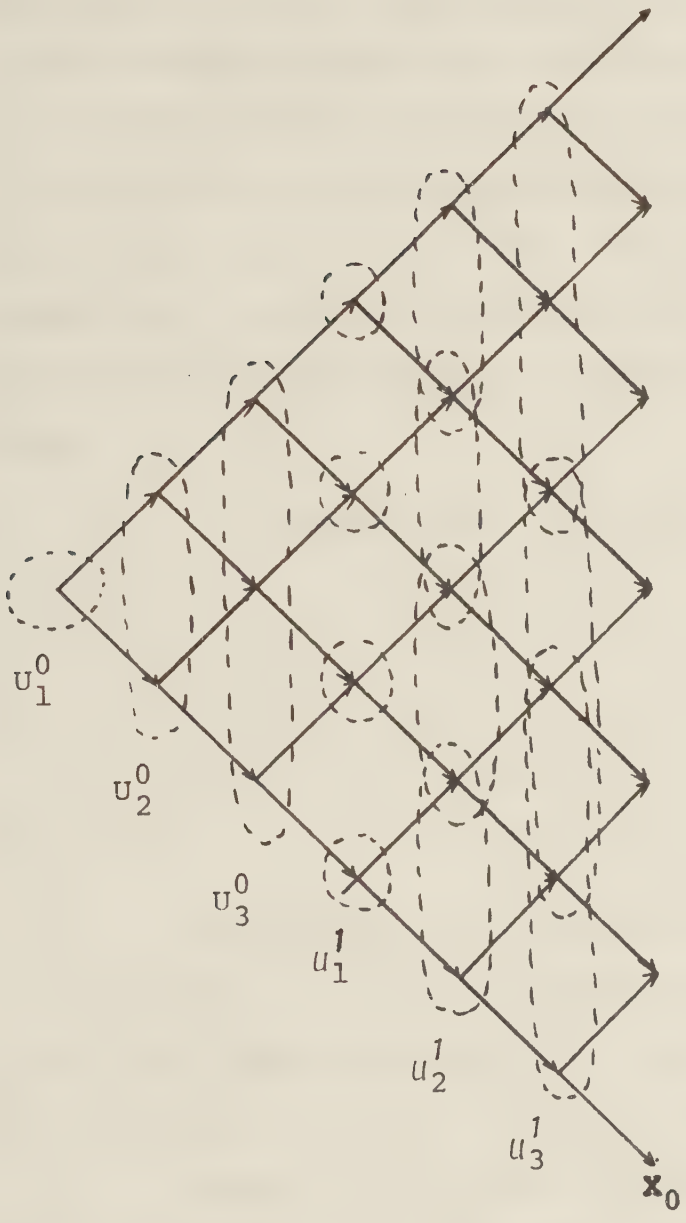
Si x^{i+1} est dans $V \in \mathcal{U}_\ell$ c'est le joueur ℓ qui a le trait et qui ne connait pas x^{i+1} mais seulement V. Le joueur ℓ choisira un index h^{i+1} dans H_V d'où une nouvelle position du jeu:

$$x^{i+2} = \nu_{h^{i+1}}(x^{i+1})$$

etc... Le jeu s'arrête dès que $x \in X_0$ et le coût de chaque joueur est déterminé par $\phi_j(x)$, $j \in M$.

Pour jouer les joueurs adoptent des *stratégies*. Une stratégie σ_j pour le joueur j est une application qui fait correspondre à tout ensemble d'information $U \in \mathcal{U}_j$ un index $h \triangleq \sigma_j(U) \in H_U$. Le joueur *adopte* la stratégie σ_j si, chaque fois que la position du jeu est dans U il s'engage à choisir l'index $h = \sigma_j(U)$.

Exemple 1.1: Soit le couple (X,Γ) défini par le graphe suivant:



Nous avons indiqué les ensembles d'information de trois joueurs et nous poserons:

$$u_j = \{U_j^0\} \cup u_j^1, \qquad j = 1,2,3.$$

Nous avons aussi indiqué l'ensemble X_0 des positions sans

successeur. Remarquons que, sur cet exemple chaque joueur a le trait deux fois, que le joueur 1 connait exactement la position du jeu quand il a le trait cependant que les joueurs 2 et 3 ont la même information que le joueur 1. En effet le joueur 2 sait quelle position occupait le jeu quand le joueur 1 a joué mais ne sait pas quel choix a été fait par ce joueur. Appelons $y(0)$ la position initiale du jeu, $\{y(1)\}$ les positions constituant chacun des ensembles de U^1, et $\{y(2)\}$ les éléments de X_0, nous pourrions alors avoir une représentation équivalente de ce jeu sous la forme d'une équation de récurrence:

$$y(k+1) = y(k) + \sum_{j=1}^{3} u_j(k) \qquad k = 0,1$$

$$u_j(k) \in \{-1,+1\}$$

$$y(k) \in Z \qquad k \in \{0,1,2\}$$

$$y(0) = 0.$$

Chaque variable $u_j(k)$ correspond à l'index que choisit le joueur j. La structure d'information indiquée correspond au cas où chaque joueur connait $y(k)$ avant de choisir $u_j(k)$. Comme nous le verrons au Chapitre 2, il s'agit là de la structure fondamentale des jeux multi-étages.

Friedmann (1971) a défini de façon générale un jeu différentiel comme la "limite" d'une suite de jeux multi-étages avec des structures d'information particulières. Au chapitre 4 nous considérerons un jeu différentiel défini selon la terminologie de Blaquière (1970), cependant nous devrons garder à l'esprit que la plupart des concepts ou des difficultés que

nous proposerons ou que nous rencontrerons pourraient se transposer au contexte des jeux définis sous forme extensive.

Les jeux multi-étages, comme les jeux différentiels, nous apparaissent donc comme des cas particuliers de jeux ayant des structures d'information particulières et une représentation commode des applications Γ et ν.

Si, pour le jeu de la définition 1.1 on considère la position initiale x^i et les stratégies σ_j, $j \in M$ il y correspond un ensemble de positions bien déterminé. Si un élément de X_0 se trouve dans cet ensemble le coût de chaque joueur est défini et correspond à x^i et au vecteur stratégique $\sigma \triangleq (\sigma_j)_{j\in M}$. Notons les coûts:

$$V_j(x^i;\sigma), \quad j \in M.$$

Si on ne retient du jeu que cette correspondance entre les vecteurs stratégiques et les coûts on a un *jeu mis sous forme normale*, étant donné la position initiale x^i. C'est en général à partir de cette forme que les diverses notions d'optimalité des stratégies ont été définies. La notion d'équilibre par exemple fut proposée par Nash (1950 a)) comme un concept d'optimalité non-coopérative et, sous des hypothèses topologiques concernant un jeu sous forme normale, des théorèmes d'existence (Nash (1950 a)), Berge (1957)) et d'unicité (Rosen (1965)) ont été établis.

1.2. De la forme normale à la forme de fonction caractéristique

"On dira qu'un sous-ensemble $S \subset M$ est une coalition si les joueurs de S ont la possibilité de discuter entre eux de la situation afin de choisir

de concert la stratégie qu'ils adopteront".(*)

La *fonction caractéristique* définit pour chaque coalition les coûts que cette coalition peut *assurer* à ses joueurs.

Ainsi, considérant les espaces:

$$R^S \triangleq \prod_{j \in S} R \qquad \forall\, S \subset M$$

la fonction caractéristique v fera correspondre à une coalition $S \subset M$ un ensemble $v(S) \subset R^S$.

Le passage d'un jeu sous forme normale à la fonction caractéristique peut s'effectuer de la façon suivante:

$$\omega_S \in v(S) \Rightarrow \exists\, \sigma_S \qquad \forall\, \sigma_{M-S} \qquad \forall\, j \in S$$

$$V_j(x^i, (\sigma_S, \sigma_{M-S})) \leq \omega_j$$

où on a posé:

$$\omega_S \triangleq (\omega_j)_{j \in S} \qquad \sigma_S = (\sigma_j)_{j \in S} \qquad \sigma_{M-S} = (\sigma_j)_{j \in M-S}.$$

Nous avons implicitement considéré la position initiale x^i comme donnée.

La fonction caractéristique peut alors être considérée comme une indication de la *puissance d'une coalition*.

Remarquons que l'on aurait pu aussi définir v(S) comme un sous-ensemble de R^M au lieu de R^S en ne distinguant pas entre v(S) et le cylindre:

(*) Berge (1957).

$$v(S) \times R^{M-S}.$$

Cette notion de fonction caractéristique a été proposée initialement par Von Neumann et Morgenstern (1944) dans le cas où les joueurs peuvent effectuer des *paiements latéraux* et a été étendue au cas que nous considérons par Aumann et Peleg (1960).

1.3. Le coeur d'un jeu sous forme de fonction caractéristique

Considérons une situation où tous les joueurs coopérent. Etant donné la position initiale x^i il existe un ensemble des vecteurs de coûts possibles que nous appellerons $H \subset R^M$.

Un coût $\hat{\omega}_M$ sera *Paréto-optimal* s'il vérifie:

$$\hat{\omega}_M \in H \quad \text{et} \quad \forall\, \omega_M \in H, \quad \omega_M \leq \hat{\omega}_M \Rightarrow \omega_M = \hat{\omega}_M.$$

Parmi les coûts Paréto-optimaux certains sont inacceptables lors d'un accord de coopération. En effet, si on a:

$$\hat{\omega}_M = (\hat{\omega}_S, \hat{\omega}_{M-S})$$

et si:

$$\exists\, \omega_S \in v(S) \quad \text{t.q.} \quad \omega_S < \hat{\omega}_S$$

alors la coalition S peut s'assurer un coût strictement inférieur à celui induit par $\hat{\omega}_S$. On dit que la coalition S *bloque* le vecteur $\hat{\omega}_M$.

Définition 1.2: Le *coeur* d'un jeu sous forme de fonction caractéristique est l'ensemble des vecteurs de coût, Paréto-optimaux, qu'aucune coalition ne peut bloquer. ■

Ainsi un vecteur de coût situé dans le coeur du jeu peut représenter un accord de coopération possible. Les propriétés générales du coeur d'un jeu sans paiements latéraux ont été étudiées par Aumann (1961) et Scarf (1967, 1971) en particulier.

1.4. Solution coopérative de Nash

Nash (1950 b), 1953) a proposé une élégante solution au problème de la détermination *d'une* solution coopérative dans un jeu à deux joueurs $M \triangleq \{1,2\}$ à somme non nulle.

Soit $H \subset R^2$ l'ensemble des coûts possibles. Supposons qu'il existe un vecteur $\bar{\omega} \triangleq (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) \in H$ représentant les coûts de "Statu Quo" qui s'appliqueront si l'accord n'a pas lieu.

Le problème consiste à trouver le vecteur de coût $\omega^* \triangleq (\omega_1^*, \omega_2^*)$ qui devrait, *d'un point de vue normatif*, faire l'objet d'un accord étant donné l'ensemble H des coûts possibles et le point $\bar{\omega}$ de Statu Quo.

Evidemment, le point de vue normatif sera traduit par un ensemble d'axiomes que nous énonçons ci-dessous:

A1: *Rationalité individuelle:* $\omega_j^* \leq \bar{\omega}_j$, $j = 1,2$

A2: *Réalisabilité:* $\omega^* \in H$

A3: *Paréto-optimalité:* $\omega \in H$ et $\omega \leq \omega^* \Rightarrow \omega = \omega^*$.

A4: *Indépendance des choix non pertinents:* Soit S une partie de H telle que $\bar{\omega} \in S$ et $\omega^* \in S$, alors si on réduit l'ensemble des coûts possibles à S on aura encore ω^* comme solution coopérative.

A5: *Invariance par transformation affine:* Soit une transformation affine des coûts:

$$\omega_1' = \alpha_1\omega_1 + \beta_1$$

$$\omega_2' = \alpha_2\omega_2 + \beta_2$$

transformant H en H'. Alors la solution coopérative associée au Statu Quo: $\bar{\omega}'$ où:

$$\bar{\omega}_j' = \alpha_j\bar{\omega}_j + \beta_j, \quad j = 1,2$$

et à l'ensemble H' des coûts possibles est le vecteur ω'^* où:

$$\omega_j'^* = \alpha_j\omega_j^* + \beta_j, \quad j = 1,2.$$

A6: *Symétrie:* Si $(\omega_1,\omega_2) \in H \Rightarrow (\omega_2,\omega_1) \in H$ et si $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$ alors $\omega_1^* = \omega_2^*$.

Ces axiomes ont été discutés dans plusieurs ouvrages, en particulier Luce et Raiffa (1957). Si ces axiomes sont acceptés Nash a établi que la solution coopérative ω^* devait nécessairement vérifier la propriété suivante:

$$(\omega_1^*-\bar{\omega}_1)(\omega_2^*-\bar{\omega}_2) = \sup_{\substack{\omega\in H \\ \omega\leq\bar{\omega}}} (\omega_1-\bar{\omega}_1)(\omega_2-\bar{\omega}_2).$$

Owen (1968) donne une démonstration détaillée de ce résultat.

1.5. Présentation des chapitres suivants

Dans le Chapitre 2 nous considérons un jeu multi-étages dans la ligne de ceux définis par Blaquière et Leitmann (1970) et Haurie (1970). Nous adaptons à ce contexte particulier la notion de fonction caractéristique et nous caractérisons le coeur du jeu en chaque état. Nous constatons alors que la notion de coeur n'est pas une conception satisfaisante d'une solution coopérative dans le cadre d'un jeu multi-étages; et nous proposons

la notion de *Super-coeur* associée à la notion de commande *C-optimale*. Des algorithmes de type "Programmation Dynamique" permettent de calculer les fonctions caractéristiques et les commandes C-optimales. Des propriétés topologiques de la fonction caractéristique sont établies et des exemples montrent la différence entre le coeur et le super-coeur.

Dans le Chapitre 3 nous approfondissons l'étude de la fonction caractéristique d'un jeu sous forme normale par le biais de l'étude des décisions Paréto-optimales pour des systèmes multi-critères et perturbés. Des conditions nécessaires et des conditions suffisantes sont établies étendant le *principe de scalarisation* proposé initialement par Da Cunah et Pollak (1967).

Dans le Chapitre 4 enfin nous considérons l'application du concept de solution coopérative de Nash à un jeu différentiel à deux joueurs. Nous établissons une première condition nécessaire basée sur des propriétés géométriques du jeu et nous en déduisons immédiatement que la solution coopérative de Nash souffre d'une certaine instabilité puisqu'elle définit en général une stratégie qui ne sera optimale qu'à l'état initial. Un exemple simple montre qu'en effet une stratégie correspondant à la solution coopérative de Nash peut engendrer une trajectoire telle qu'en un point donné il soit avantageux pour un joueur de ne plus jouer de façon coopérative mais plutôt de façon "Min-Max".

Ces difficultés que nous rencontrerons dans l'application des solutions coopératives à des jeux multi-étages ou différentiels seront à fortiori présentes dans des jeux sous forme extensive. Rappelons à ce sujet que Aumann et Maschler (1972) ont montré que même le concept de point en selle utilisé comme solution d'un duel peut être remis en question quand on considère le jeu sous sa forme extensive plutôt que normale.

CHAPITRE 2: JEUX COOPERATIFS MULTI-ETAGES

Plan: 2.1 Les règles du jeu.

2.2 Fonctions caractéristiques, coeurs du jeu et C-optimalité.

2.3 Liens avec la théorie de l'accessibilité des systèmes perturbés.

2.4 Quelques propriétés des fonctions caractéristiques des jeux séparables et des jeux linéaires convexes.

2.5 Exemples.

2.6 Conclusion.

Introduction

Dans ce chapitre nous considérons un jeu quantitatif multi-étage à m joueurs et nous nous intéressons aux solutions coopératives. Si tous les joueurs coopèrent il est raisonnable pour eux de choisir une commande Paréto-optimale. Cependant un sous-ensemble des joueurs, se formant en coalition, pourrait éventuellement "bloquer" le vecteur de coût Paréto-optimal en s'assurant, quelles que soient les actions des joueurs hors de cette coalition, un vecteur de coût dont chaque composante est inférieure à celle qui y correspond dans le coût Paréto-optimal. Pour pouvoir s'assurer ce coût la coalition, qui fait face à des joueurs dont le comportement lui est à priori inconnu, peut utiliser une stratégie. Nous ferons l'hypothèse qu'il peut y avoir des contraintes stratégiques pour une coalition pouvant limiter son choix. Pour préciser ces notions nous définirons les notions de *fonction caractéristique*, de *coeur* et de *super-coeur*. La notion de *super-coeur* est nouvelle et correspond à une notion d'optimalité que nous appelons *C-optimalité* qui nous parait être la notion d'optimalité coopérative appropriée au contexte dynamique des jeux multi-étages. En effet, un vecteur de coût sera contenu dans le super-coeur à l'état initial du jeu si et seulement si il n'y a aucune possibilité pour une coalition de bloquer ce vecteur de coût le long du chemin Paréto-optimal qui l'engendre.

2.1. Les règles du jeu.

Le jeu multi-étage que nous considérons est défini par les données suivantes:

$$M \triangleq \{1,2,\ldots,m\}, \quad m \text{ entier donné},$$

est l'ensemble des joueurs,

$$\mathbb{K} \triangleq \{0,1,\ldots,K\}, \quad K \text{ entier donné},$$

est l'ensemble des étages,

$$\forall\, j \in M, \quad \forall\, k \in \mathbb{K} - K$$

$$u_j(k) \in U_j^k, \quad \text{ensemble donné,} \tag{2.1}$$

est la variable de commande du joueur j, à l'étage k dont il peut choisir la valeur dans U_j^k.

$$\forall\, k \in \mathbb{K} \quad x(k) \in X^k, \quad \text{ensemble donné,} \tag{2.2}$$

est la variable d'état du jeu, contrainte par X^k.

L'équation d'état du jeu est définie par:

$$x(k+1) = f^k[x(k),u_M(k)], \quad k = 0,\ldots,K-1 \tag{2.3}$$

où on a posé:

$$u_M(k) \triangleq \{u_j(k)\}_{j\in M} \in \prod_{j\in M} U_j^k \triangleq U_M^k$$

et où $f^k : X^k \times U_M^k \to X^{k+1}$ est une fonction définie pour tout $k \in \mathbb{K} - K$.

Soit i dans $\mathbb{K}$, définissons alors

$$\mathbb{K}^i \triangleq \{i,i+1,\ldots,K\}.$$

Nous appellerons *chemin* $\tilde{x}^i$ *issu de l'état* x^i à l'étage i, *engendré par la commande:*

$$\tilde{u}_M^i \triangleq (u_M(k))_{k\in\mathbb{K}^i-K} \in \prod_{k\in\mathbb{K}^i-K} U_M^k$$

une suite d'états:

$$\tilde{x}^i \triangleq (x(k))_{k\in\mathbb{K}^i} \in \prod_{k\in\mathbb{K}^i} X^k$$

telle que (2.3) soit vérifié pour tout k dans $\mathbb{K}^i-K$ et telle que:

$$x(i) = x^i.$$

Enfin, pour tout joueur j de M nous définissons une *fonctionnelle de coût* associant à un chemin issu de l'état x^i à l'étage i et engendré par la commande $\tilde{u}_M^i$ un nombre réel:

$$\forall\, j \in M \quad J_j(i,\tilde{x}^i,\tilde{u}_M^i) \triangleq \sum_{k\in\mathbb{K}^i-K} \phi_j^k[x(k),u_M(k)] + \Theta_j[x(K)] \qquad (2.4)$$

où

$$\phi_j^k : X^k \times U_M^k \to (-\infty,\infty], \quad j \in M, \quad k \in \mathbb{K}-K$$

$$\Theta_j : X^K \to (-\infty,\infty], \quad j \in M$$

sont des fonctionnelles données.

Les relations (2.1)-(2.4) définissent les règles du jeu.

Nous noterons:

$$J_M(\cdot) \triangleq (J_j(\cdot))_{j\in M}, \quad \phi_M^k(\cdot) \triangleq (\phi_j^k(\cdot))_{j\in M}, \quad \Theta_M(\cdot) \triangleq (\Theta_j(\cdot))_{j\in M}$$

les fonctions de coût, vectorielles associées à (2.4).

2.2. Fonctions caractéristiques, coeurs du jeu et C-optimalité.

Dans cette section nous étendrons au jeu multi-étage défini par (2.1)-(2.4) les notions de *fonction caractéristique* et de *coeur* telles que proposées par Aumann (1961) pour des jeux à un seul étage (jeux sous forme normale). Nous proposerons ensuite une nouvelle notion d'optimalité coopérative que nous appellerons C-optimalité. Cette notion, plus restrictive que celle de coeur, est adaptée à la nature dynamique d'un jeu multi-étage.

Nous commencerons par faire le rappel suivant:

Définition 2.1: Une commande $\tilde{u}_M^{*i}$ est Paréto-optimale en x^i, si elle engendre un chemin $\tilde{x}^{*i}$ issu de x^i à l'étage i, tel que pour toute autre commande $\tilde{u}_M^i$ engendrant un chemin $\tilde{x}^i$ issu de x^i à l'étage i on ait:

$$J_M[i,\tilde{x}^i,\tilde{u}_M^i] \leq J_M[i,\tilde{x}^{i*},\tilde{u}_M^{i*}] \Rightarrow$$

$$J_M[i,\tilde{x}^i,\tilde{u}_M^i] = J_M[i,\tilde{x}^{i*},\tilde{u}_M^{i*}]. \quad \blacksquare$$

La Paréto-optimalité est une solution coopérative pour un jeu à m joueurs. Cependant toute commande Paréto-optimale en x^i ne sera pas nécessairement "acceptable" comme solution coopérative si des joueurs peuvent se former en coalition. En effet certains vecteurs de coûts résultant de commandes Paréto-optimales peuvent être *bloqués* par une (ou plusieurs) coalition dans la mesure où cette coalition peut *garantir* à chacune de ses membres un coût strictement inférieur.

Une *coalition* S est une partie de M. Nous utiliserons les notations suivantes:

$$U_S^k \triangleq \prod_{j\in S} U_j^k$$

$$u_S(k) \triangleq (u_j(k))_{j\in S} \in U_S^k$$

$$u_S^i \in \prod_{k\in \mathbb{K}_i - K} U_S^k \ .$$

Nous considérons que les joueurs d'une coalition S décident de jouer de façon *coopérative*. Les joueurs hors de la coalition formeront l'ensemble M-S.

Pour jouer, la coalition S adoptera une stratégie μ_S définie par:

$$\mu_S \triangleq (\mu_S^k)_{k\in \mathbb{K}-K} \in \prod_{k\in \mathbb{K}-K} C_S^k \subset \prod_{k\in \mathbb{K}-K} F_S^k$$

où C_S^k est une partie de l'ensemble F_S^k des applications $\mu_S^k : X^k \to U_S^k$. C_S^k est appelée la *contrainte stratégique*, à l'étage k, de la coalition S. Etant donné que les joueurs de M-S sont en dehors de la coalition, étant donné un état initial x^i à l'étage i et une stratégie μ_S, chaque joueur j de la coalition S aura un *coût garanti* défini par:

$$\psi_{j/S}(i,x^i,\mu_S) \triangleq$$

$$\mathrm{Sup}\left\{ \sum_{k\in \mathbb{K}^i - K} \phi_j^k[x(k),\mu_S^k[x(k)],u_{M-S}(k)] + \Phi_j^K[x(K)] \right.$$

$$\left. : u_{M-S}(k) \in U_{M-S}^k, k \in \mathbb{K}^i - K \right\} \qquad (2.5)$$

où la suite $(x(k))_{k\in \mathbb{K}^i}$ vérifiera:

$$\forall\, k \in \mathbb{K}^i\text{-}K \quad x(k+1) = f^k[x(k), \mu_S^k[x(k)], u_{M-S}(k)]. \tag{2.6}$$

Nous considérerons aussi le *coût garanti vectoriel*:

$$\psi_S(\cdot) \triangleq \{\psi_{j/S}(\cdot)\}_{j\in S}.$$

Définition 2.2: La *fonction caractéristique*, à l'étage i, du jeu défini par les règles (2.1)-(2.4) est la correspondance:

$$v^i : (S,x(i)) \to v^i[S,x(i)] \subset R^S \triangleq \prod_{j\in S} (-\infty,\infty]$$

définie par:

$$\omega_S \triangleq (\omega_j)_{j\in S} \in v^i[S,x(i)] \iff$$

$$\exists\, \mu_S \text{ tel que } \psi_S[i,x(i),\mu_S] \leq \omega_S. \quad \blacksquare \tag{2.7}$$

Nous voyons que, si ω_S est dans l'ensemble $v^i[S,x(i)]$ il existe un coût garanti pour chaque joueur j de la coalition S qui ne dépasse pas ω_j. Nous dirons:

Définition 2.3: La coalition S *bloque* le vecteur ω_M en x(i) si:

(i) $\omega_M \triangleq (\omega_S, \omega_{M-S}) \in R^M$

(ii) $\omega_S \in \overset{0}{\overbrace{v^i[S,x(i)]}}$. $\blacksquare$

L'interprétation de la notion de blocage est la suivante. Si à l'étage i, dans l'état x(i), tous les joueurs décident de coopérer, la coalition S pourra refuser toute forme d'accord qui lui ferait supporter un coût vectoriel ω_S dont chaque composante est supérieure à

celle d'un vecteur de coût garanti. Ceci nous conduit à la notion de coeur du jeu.

Définition 2.4: Le *coeur du jeu* en x(i) est l'ensemble $\Omega^i[x(i)]$ des vecteurs ω_M de R^M tels que:

(i) Il existe une commande $\tilde{u}_M^i$ Paréto-optimale en x(i) et engendrant le coût ω_M.

(ii) Aucune coalition S ne peut bloquer ω_M en x(i). ■

Nous sommes maintenant en mesure de nous intéresser à un concept de solution coopérative pour un jeu multi-étage.

Définition 2.5: Une commande $\tilde{u}_M^{*i}$ sera C-*optimale* en x^i si elle engendre un chemin $\tilde{x}^{*i}$ issu de x^i à l'étage i tel que, si on définit:

$$\omega_M^*(\ell) \triangleq (J_j[\ell, \tilde{x}^{*\ell}, \tilde{u}_M^{*\ell}])_{j\in M} \quad \forall\, \ell \in \mathbb{K}^i - K \tag{2.8}$$

où on a posé:

$$\tilde{x}^{*\ell} \triangleq (x^*(k))_{k\in \mathbb{K}^\ell}, \quad \tilde{u}^{*\ell} \triangleq (u_M^*(k))_{k\in \mathbb{K}^\ell - K}$$

on ait:

$$\forall\, \ell \in \mathbb{K}^i - K \quad \omega_M^*(\ell) \in \Omega^\ell[x^*(\ell)]. \quad ■ \tag{2.9}$$

Nous constatons qu'une commande C-optimale en x^i est automatiquement Paréto-optimale puisque l'on a:

$$\omega_M^*(i) \triangleq (J_j[i, \tilde{x}^{*i}, \tilde{u}_M^{*i}])_{j\in M} \in \Omega^i[x^i]$$

de plus, aucune coalition ne peut bloquer le "coût à venir" le long du chemin $\tilde{x}^{*\ell}$, issu de $x^*(\ell)$, à l'étage ℓ, et engendré par $\tilde{u}_M^{*\ell}$.

Remarquons tout de suite que les vecteurs ω_M du coeur du jeu $\Omega^i[x^i]$ ne sont pas en général des vecteurs de coût toujours engendrés par des commandes C-optimales en x^i. La C-optimalité est une notion plus restrictive que la notion d'optimalité coopérative fournie par le coeur en x^i. Dans la section suivante nous donnerons effectivement un contre-exemple où une commande engendrant un vecteur de coût dans le noyau $\Omega^i[x^i]$ n'est cependant pas C-optimale. Nous sommes ainsi conduits à poser:

Définition 2.6: Le *super-coeur* du jeu en x(k) est la partie $\overset{+}{\Omega}{}^k[x(k)]$ de $\Omega^k[x(k)]$ définie par:

$$\omega_M \in \overset{+}{\Omega}{}^k[x(k)] \iff \exists\ \tilde{u}_M^k, \quad \text{C-optimale en } x(k)$$

$$\text{telle que} \quad \omega_M = J_M(k, \tilde{x}^k, \tilde{u}_M^k)$$

où $\tilde{x}^k$ est le chemin issu de x(k), à l'étage k, engendré par $\tilde{u}_M^k$. ■

On a immédiatement le résultat suivant:

Théorème 2.1: Si $\tilde{u}_M^{*i}$ est une commande C-optimale en x^i, engendrant le chemin $\tilde{x}^{*i}$, alors on aura:

$$\forall\ k \in \mathbb{K}^i - K \quad \omega_M^*(k) \in \overset{+}{\Omega}{}^k[x^*(k)] \tag{2.10}$$

où $\omega_M^*(\cdot)$ est défini en (2.8).

Démonstration: Si on avait:

$$\omega_M^*(\ell) \notin \overset{+\ell}{\Omega}[x^*(k)]$$

pour un étage ℓ de $\mathbb{K}^i$ - K cela impliquerait qu'il existerait un étage k de $\mathbb{K}^\ell$ - K pour lequel on aurait:

$$\omega_M^*(k) \notin \Omega^k[x^*(k)]$$

ce qui contredirait (2.9). ■

Remarquons, pour conclure cette section, que les contraintes stratégiques C_S^k peuvent correspondre à diverses *structures d'information* possibles. En effet si C_S^k coïncide avec Γ_S^k cela revient à dire que chaque coalition a la possibilité d'observer exactement l'état du jeu x(k) dans X^k. A l'autre extrême se trouverait le cas où la coalition S ne peut observer l'état x(k) dans X^k, cela correspondrait à des contraintes stratégiques C_S^k telles que:

$$\mu_S^k \in C_S^k \iff \exists\, u_S(k) \in U_S^k \quad \text{t.q.}$$

$$\forall\, x(k) \in X^k \qquad \mu_S^k[x(k)] = u_S(k).$$

De telles contraintes stratégiques reviendraient à imposer aux coalitions d'utiliser des "contrôles en boucle ouverte". Notre formulation permet ainsi de traiter tout le spectre des structures d'information possibles.

2.3. Liens avec la théorie de l'accessibilité des systèmes perturbés.

Dans cette section nous considérerons le cas particulier où, à chaque étage k pour toute coalition S, la contrainte stratégique C_S^k coincide avec F_S^k.

Nous approfondirons alors l'étude des fonctions caractéristiques, des coeurs et des super-coeurs à partir de considérations d'accessibilité dans les ensembles d'état. Nous nous inspirerons des travaux de Delfour et Mitter (1969), Bertsekas et Rhodes (1971) et, principalement, de Blaquière et Wiese (1970).

Définissons tout d'abord les ensembles d'état augmentés par:

$$\underset{\sim}{X}^k = X^k \times R^M, \quad \forall\, k \in \mathbb{K}$$

et les variables d'état augmentées:

$$\underset{\sim}{x}(k) \triangleq (x(k), x_{OM}(k)) \in \underset{\sim}{X}^k$$

posons:

$$F^k : \underset{\sim}{X}^k \times U_M^k \to \underset{\sim}{X}^{k+1}, \quad \forall\, k \in \mathbb{K} - K$$

où:

$$F^k[\underset{\sim}{x}(k), u_M(k)] \triangleq (f^k[x(k), u_M(k)], \phi_M^k[x(k), u_M(k)] + x_{OM}(k))$$

dans ces conditions, de (2.3) et (2.4) on obtient les équations d'état augmentées:

$$\underset{\sim}{x}(k+1) = F^k[\underset{\sim}{x}(k), u_M(k)]. \tag{2.11}$$

Considérons enfin les fonctions:

$$g_j : \underset{\sim}{X}^K \to (-\infty,\infty], \quad \forall\, j \in M$$

définie par:

$$g_M[\underset{\sim}{x}(K)] \triangleq x_{0M}(K) + \Theta_M[x(K)]. \tag{2.12}$$

Nous utiliserons par la suite les fonctions vectorielles:

$$g_S(\cdot) \triangleq (g_j(\cdot))_{j\in S}, \quad \forall\, S \subset M.$$

Etant donné un état initial $\underset{\sim}{x}^i$, à l'étage i, et une commande $\tilde{u}_M^i$ il existe une seule *trajectoire* $\tilde{\underset{\sim}{x}}^i$ issue de $\underset{\sim}{x}^i$ où:

$$\tilde{\underset{\sim}{x}}^i \triangleq (\underset{\sim}{x}(k))_{k\in \mathbb{K}^i}$$

et où (2.11) est vérifiée pour tout k de $\mathbb{K}^i$ - K.

Théorème 2.2: Pour toute coalition S et pour tout vecteurs ω_S de R^S définissons les ensembles suivants:

(i) $\underset{\sim}{X}^K(S,\omega_S) \triangleq \{\underset{\sim}{x} \in \underset{\sim}{X}^K : g_S(\underset{\sim}{x}) < \omega_S\}$

$\bar{\underset{\sim}{X}}^K(S,\omega_S) \triangleq \{\underset{\sim}{x} \in \underset{\sim}{X}^K : g_S(\underset{\sim}{x}) \leq \omega_S\}$

(ii) $\forall\, k \in \mathbb{K} - K$, $\underset{\sim}{X}^k(S,\omega_S)$ (resp. $\bar{\underset{\sim}{X}}^k(S,\omega_S)$)

sera défini par la relation de recurrence:

$$\underset{\sim}{x} \in \underset{\sim}{X}^k(S,\omega_S) \text{ (resp. } \bar{\underset{\sim}{X}}^k(S,\omega_S)) \Leftrightarrow$$

$$\exists\, u_S(k) \in U_S^k, \quad \forall\, u_{M-S}(k) \in U_{M-S}^k$$

$$F^k[\underset{\sim}{x},(u_S(k),u_{M-S}(k))] \in \underset{\sim}{X}^{k+1}(S,\omega_S) \text{ (resp. } \bar{\underset{\sim}{X}}^{k+1}(S,\omega_S)) \tag{2.13}$$

alors on vérifiera les propositions suivantes:

(a) $\forall\, k \in \mathbb{K} - K, \quad \forall\, x \in X^k, \quad \forall\, S \subset M$

$$v^k(S,x) = \{\omega_S \in R^S : (x,0) \in \bar{\underset{\sim}{X}}^k(S,\omega_S)\}$$

(b) une commande $\tilde{u}_M^{i*}$, Paréto-optimale en x^i, engendrant une trajectoire $\tilde{\underset{\sim}{x}}^{i*} \triangleq (\underset{\sim}{x}^*(k))_{k\in\mathbb{K}^i}$ sera C-optimale en x^i si et seulement si on a:

$$\forall\, k \in \mathbb{K}^i - K \qquad \underset{\sim}{x}^*(k) \notin \underset{\sim}{X}^k(S,\omega_S^*)$$

où on a posé:

$$\omega_S^* \triangleq g_S[\underset{\sim}{x}^*(K)].$$

Démonstration: Par construction $\underset{\sim}{x}^\ell \triangleq (x_\ell,0)$ sera élément de $\underset{\sim}{X}^\ell(S,\omega_S^*)$ (resp. $\bar{\underset{\sim}{X}}^\ell(S,\omega_S^*)$) si et seulement si $\exists\, u_S^+(\ell)\ \ \forall\, u_{M-S}(\ell)\ \ \exists\, u_S^+(\ell+1)$ $\forall\, u_{M-S}(\ell+1)\ \ldots\ \exists\, u_S^+(K-1)\ \ \forall\, u_{M-S}(K-1)$ la commande $\tilde{u}^\ell \triangleq (u_S^+(k),u_{M-S}(k))_{k\in\mathbb{K}^\ell-K}$ engendre une trajectoire $\tilde{\underset{\sim}{x}}^\ell \triangleq (\underset{\sim}{x}(k))_{k\in\mathbb{K}^\ell}$ issue de $\underset{\sim}{x}^\ell$ à l'étage ℓ et telle que:

$$g_S[\underset{\sim}{x}(K)] < \omega_S^* \quad \text{(resp. } \leq \text{)}. \tag{2.14}$$

De plus la relation de récurrence (2.12) montre qu'à tout étage $k \in \mathbb{K} - K$ il existe une application $\mu_S^k : \underset{\sim}{X}^k \to U_S^k$ telle que:

$$\forall\, \underset{\sim}{x} \in \underset{\sim}{X}^k \quad \forall\, u_{M-S}(k) \in U_{M-S}(k) \quad F^k[\underset{\sim}{x},(\mu_S(\underset{\sim}{x}),u_{M-S}(k))] \in \underset{\sim}{X}^{k+1}.$$

Du fait que la variable $x_{0M}(k)$ n'intervient ni dans $f^k(\cdot)$ ni dans ϕ_S^k on peut toujours considérer que μ_S^k ne dépend que de x. Nous noterons encore μ_S^k cette nouvelle application.

Finalement nous garderons la notation μ_S^k pour désigner la stratégie dans F_S^k, $\mu_S^k : X_k \to U_S^k$ obtenue en complêtant arbitrairement l'application définie précédemment.

On voit ainsi que l'on peut construire la suite $(u_S^\dagger(k))_{k\in\mathbb{K}^{\ell}-K}$ de (2.13) de la façon suivante:

$$
\begin{aligned}
&u_S^\dagger(\ell) = \mu_S^\ell(\underset{\sim}{x}^\ell)\\
&u_S^\dagger(\ell+1) = \mu_S^{\ell+1}[F^\ell[\underset{\sim}{x}^\ell,(u_S^\dagger(\ell),u_{M-S}(\ell))]]\\
&\vdots\\
&u_S^\dagger(K-1) = \mu_S^{K-1}[F^{K-2}[F^{K-3}\ \ldots\ ]],\ (u_S^\dagger(K-2),u_{M-S}(K-2))]. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

De (2.5), (2.14) et (2.15) on déduit donc que l'on a:

$$\exists\ \mu_S \ \text{ tel que } \ \psi_S[\ell,x^\ell,\mu_S] < \omega_S^*, \quad (\text{resp. } \leq) \qquad (2.16)$$

et donc:

$$\omega_S^* \in \overbrace{v^\ell[S,x^\ell]}^{0} \quad (\text{resp. } v^\ell[S,x^\ell]) \qquad (2.17)$$

d'après la définition 2.2.

Réciproquement si (2.17) est vérifié, il existe μ_S tel que (2.16) soit vrai ce qui nous permet de remonter à (2.14) et donc à:

$$\underset{\sim}{x}^\ell = (x_\ell,0) \in \underset{\sim}{X}^\ell(S,\omega_S^*) \quad (\text{resp. } \bar{\underset{\sim}{X}}^\ell(S,\omega_S^*)). \qquad \blacksquare$$

Remarquons que les ensembles $\underset{\sim}{X}^K(S,\omega_S)$ ou $\bar{\underset{\sim}{X}}^K(S,\omega_S)$ peuvent être considérés comme des *cibles* que la coalition S veut atteindre quelle que soit l'action des joueurs de M-S. L'ensemble $\underset{\sim}{X}^k(S,\omega_S)$ représente alors l'ensemble des états augmentés à l'étage k d'où la cible $\underset{\sim}{X}^K(S,\omega_S)$ est

accessible pour la coalition S quelle que soit la riposte des joueurs ne faisant pas partie de S.

Nous considérerons maintenant une procédure de calcul des commandes C-optimales basée sur des considérations analogues, c'est-à-dire profondément inspirée de la *programmation dynamique*.

Théorème 2.3: Définissons dans les ensembles $\underset{\sim}{X}^k$, $k \in \mathbb{K} - K$ les sous-ensembles Y^k, $k \in \mathbb{K} - K$ et les applications:

$$p^k : Y^k \to U_M^k$$

par les règles de récurrence suivantes:

(i) $Y^{K-1} \triangleq \{y(K-1) \triangleq (x(K-1), \omega_M(K-1)) : \exists\ \bar{u}_M(K-1) \in U_M^{K-1}$ t.q.

$$\omega_M(K-1) = \phi_M^{K-1}[x(K-1), \bar{u}_M(K-1)] + \Theta_M[f^{K-1}[x(K-1), \bar{u}_M(K-1)] \in \Omega^{K-1}[x(K-1)]\} \quad (2.18)$$

$$p^{K-1}[y(K-1)] \triangleq \bar{u}_M(K-1).$$

(ii) $\forall\ k \in \mathbb{K} - \{K, K-1\}$ $Y^k \triangleq \{y(k) \triangleq (x(k), \omega_M(k)) : \exists\ \bar{u}_M(k) \in U_M^k$

t.q. $\omega_M(k) \in \Omega^k[x(k)]$ et $(f^k[x(k), \bar{u}_M(k)], \omega_M(k) - \phi_M^k[x(k), \bar{u}_M(k)]) \in Y^{k+1}\}$ (2.19)

$$p^k[y(k)] = \bar{u}_M(k).$$

Alors il existe une commande C-optimale en x*(i), engendrant le coût vectoriel $\omega_M^*(i)$ si et seulement si on a:

$$y^*(i) \triangleq (x^*(i), \omega_M^*(i)) \in Y^i.$$

De plus une trajectoire C-optimale $\underset{\sim}{\tilde{x}}^{i*}$, et la commande correspondante $\tilde{u}_M^{i*}$,

issue de $\underset{\sim}{x}(i)$ seront obtenues en résolvant les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{\sim}{x}^*(k+1) = F^k[\underset{\sim}{x}^*(f), p^k[y^*(k)]] \\
&\omega_M^*(k+1) = \omega_M^*(k) - \phi_M^k[x^*(k), p^k[y^*(k)]] \\
&y^*(k) = (x^*(k), \omega_M^*(k)) \\
&u_M^*(k) = p^k[y^*(k)] \\
&\underset{\sim}{x}^*(i) = (x(i), 0)
\end{aligned}\right\} \quad k \in \mathbb{K}^i - K. \qquad (2.20)$$

Démonstration: Si $y(i)$ est dans Y^i, $p^i[y(i)]$ est bien défini et la solution de (2.20) pour $k=i$ définira $y^*(i+1)$ et $x_{OM}(i+1)$ tels que, d'après (2.19) on ait:

$$y^*(i+1) \in Y^{i+1}$$

$$x_{OM}^*(i+1) = \phi_M^i[x^*(i), u_M^*(i)]$$

et donc:

$$\omega_M^*(i+1) = \omega_M^*(i) - x_{OM}^*(i+1)$$

par récurrence on obtient:

$$y^*(K-1) \in Y^{K-1}$$

$$x_{OM}^*(K-1) = \sum_{k=i}^{K-2} \phi_M^i[x^*(i), u_M^*(i)]$$

$$\omega_M^*(K-1) = \omega_M^*(i) - x_{OM}^*(K-1)$$

ce qui donne, d'après (2.18):

$$x^*_{OM}(K) = \omega^*_M(i) \qquad (2.21)$$

Par définition de Y^i, $\omega^*_M(i)$ est élément du coeur $\Omega^i[x(i)]$, donc il existe une commande Paréto-optimale qui engendre ce coût à partir de x(i). D'après (2.21) la commande $\tilde{u}^{i*}_M$ engendre ce coût, elle est donc Paréto-optimale. A chaque étage k on a le "coût à venir" $\omega^*_M(k)$ qui est élément du coeur $\Omega^k[x^*(k)]$, il s'agit donc d'une commande C-optimale.

Réciproquement soit $\tilde{u}^{i\dagger}_M$ une commande C-optimale en x(i), engendrant la trajectoire $\tilde{\underset{\sim}{x}}^{i\dagger}$ issue de x(i) et le coût $\omega^\dagger_M(i)$. Par définition on aura:

$$\forall\ \ell \in \mathbb{K} - K \quad \omega^\dagger_M(\ell) = \omega^\dagger_M(i) - \sum_{k=i}^{\ell-1} \phi^k_M[x^\dagger(k), u^\dagger(k)] \in \Omega^\ell[x^\dagger(\ell)]$$

d'où on déduit que l'on a:

$$y^\dagger(K-1) \in Y^{K-1}$$

et, par récurrence, on obtient finalement:

$$y^\dagger(i) \in Y^i. \qquad \blacksquare$$

Pour pouvoir utiliser l'algorithme de programmation dynamique fourni par le théorème précédent il faut évidemment avoir défini au préalable les coeurs $\Omega^k[x(k)]$. On peut, d'autre part, en déduire immédiatement le résultat suivant:

Corollaire 2.1: Le super-coeur $\overset{+}{\Omega}{}^k[x(k)]$ est aussi défini par:

$$\overset{+}{\Omega}{}^k[x(k)] = \{\omega_M : (x(k), \omega_M) \in Y^k\}. \qquad \blacksquare$$

2.4. Quelques propriétés des fonctions caractéristiques des jeux séparables et des jeux linéaires-convexes.

Dans cette section nous considérons le cas particulier où les ensembles X^k coïncident tous avec E^n cependant que les ensembles U_j^k sont des parties de E^{r_j}, r_j entier donné, pour tout k.

Définition 2.7: Le jeu sera dit *séparable* si ses équations d'état (2.3) et ses fonctionnelles de coût (2.4) s'écrivent:

$$x(k+1) = q^k[x(k)] + \sum_{j\in M} h_j^k[u_j(k)], \quad k \in \mathbb{K} - K \tag{2.22}$$

$$J_j(i,x^i,u_M^i) = \sum_{k\in \mathbb{K}^i - K} \{\phi_j^k[x(k)] + \gamma_j^k[u_j(k)]\} + \phi_j^K[x(K)] \tag{2.23}$$

où:

$$\left.\begin{array}{ll} q^k : E^n \to E^n, & h_j^k : U_j^k \to E^n \\ \phi_j^k : E^n \to R, & \gamma_j^k : U_j^k \to R \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall\, j \in M \\ \forall\, k \in \mathbb{K} - K \end{array}$$

ainsi que $\phi_j^K : E^n \to R$, $\forall\, j \in M$ sont des fonctions données. ■

Nous poserons:

$$\phi_S^k(\cdot) \triangleq (\phi_j^k(\cdot))_{j\in S}$$

$$\gamma_S^k(u_S) \triangleq (\gamma_j^k(u_j))_{j\in S}$$

$$h_S^k(u_S) \triangleq \sum_{j\in S} h_j^k(u_j^k).$$

Nous supposerons, ici aussi, qu'il n'y a pas de contraintes stratégiques pour les coalitions ($C_S^k = F_S^k$, $\forall\, S \subset M$, $\forall\, k \in \mathbb{K} - K$).

Théorème 2.4: Si le jeu est séparable les fonctions caractéristiques peuvent être construites de la façon suivante. Posons:

$$\text{(i)} \quad \forall\, x(K), \quad v^K[S,x(K)] \triangleq \{\omega_S \in R^S : \phi_S^K[x(K)] \leq \omega_S\}. \tag{2.24}$$

$$\text{(ii)} \quad \forall\, k \in \mathbb{K} - K, \quad \forall\, x \in E^n$$

$$\mathfrak{E}^{k+1}(S,x) \triangleq \bigcap_{u_{M-S}(k) \in U_{M-S}^k} v^{k+1}[S, x + h_{M-S}^k(u_{M-S}(k))]. \tag{2.25}$$

$$\text{(iii)} \quad \forall\, k \in \mathbb{K} - K, \quad \forall\, x(k)$$

$$\mathcal{H}^k[S,x(k)] \triangleq \bigcup_{u_S(k) \in U_S^k} \{\gamma_S^k[u_S(k)]\} + \mathfrak{E}^{k+1}[S, q^k[x(k)] + h_S^k[u_S(k)]]. \tag{2.26}$$

Alors on a:

$$\forall\, S \quad \forall\, k \in \mathbb{K} - K, \quad \forall\, x(k), \; v^k[S,x(k)] = \{\phi_S^k[x(k)]\} + \mathcal{H}^k[S,x(k)]. \tag{2.27}$$

Démonstration: La démonstration est en tous points semblable à celle du Théorème 3.1 de Haurie (1975) qui a été écrite pour le cas où les fonctions q^k et h_j^k sont des applications linéaires. ■

Définition 2.8: Un jeu séparable sera dit *linéaire-convexe* si l'équation d'état (2.22) s'écrit:

$$x(k+1) = A^k x(k) + \sum_{j \in M} B_j^k u_j(k) \quad \forall\, k \in \mathbb{K} - K \tag{2.28}$$

où les A^k et B_j^k sont des *applications linéaires*, et si les fonctionnelles ϕ_j^k et γ_j^k sont *convexes*. ■

Théorème 2.5: Si le jeu est linéaire-convexe alors les fonctions

caractéristiques sont *biconvexes*, c'est-à-dire qu'elles vérifient:

$$\forall\ S \subset M, \quad \forall\ x,\ x' \in E^n, \quad \forall\ \alpha \in [0,1]$$

$$\alpha v^k(S,x) + (1-\alpha)v^k(S,x') \subset v^k[S,\alpha x+(1-\alpha)x']. \tag{2.29}$$

Démonstration: Puisque les fonctionnelles ϕ_j^K sont convexes, d'après (2.24) la propriété est vérifiée à l'étage K. Supposons que la propriété soit vraie à l'étage $k+1 \in \mathbb{K}$, montrons qu'elle reste vraie à l'étage k. D'après (2.25) on déduit immédiatement que l'on aura alors:

$$\forall\ S \subset M, \quad \forall\ x,\ x' \in E^n, \quad \forall\ \alpha \in [0,1]$$

$$\alpha \mathfrak{E}^{k+1}(S,x) + (1-\alpha)\mathfrak{E}^{k+1}(S,x') \subset \mathfrak{E}^{k+1}[S,\alpha x+(1-\alpha)x']. \tag{2.30}$$

Considérons alors pour x et x' donnés dans E^n deux vecteurs:

$$\omega_S \in \mathcal{H}^k(S,x), \quad \omega'_S \in \mathcal{H}(S,x')$$

selon (2.26) nous aurons:

$$\begin{aligned} \omega_S &= \gamma_S[u_S(k)] + \lambda_S \\ \omega'_S &= \gamma_S[u'_S(k)] + \lambda'_S \end{aligned} \tag{2.31}$$

pour des vecteurs de commande $u_S(k)$ et $u'_S(k)$ dans U_S^k et où λ_S et λ'_S vérifieront:

$$\begin{aligned} \lambda_S &\in \mathfrak{E}^{k+1}[S,A^k x+B_S^k u_S(k)] \\ \lambda'_S &\in \mathfrak{E}^{k+1}[S,A^k x'+B_S^k u'_S(k)]. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Puisque γ_S est convexe nous aurons aussi:

$$\alpha\omega_S + (1-\alpha)\omega'_S \geq \gamma_S[\alpha u_S(k)+(1-\alpha)u'_S(k)] + \alpha\lambda_S + (1-\alpha)\lambda'_S. \qquad (2.33)$$

D'après (2.30) et (2.32) on aura:

$$\alpha\lambda_S + (1-\alpha)\lambda'_S \in \mathcal{E}^{k+1}[S, A^k(\alpha x+(1-\alpha)x') + B^k_S(\alpha u_S(k)+(1-\alpha)u'_S(k))]. \qquad (2.34)$$

Par construction des fonctions caractéristiques on a:

$$\omega_S \in \mathcal{E}^{k+1}(S,x) \quad \text{et} \quad \bar{\omega}_S > \omega_S \Rightarrow \bar{\omega}_S \in \mathcal{E}^{k+1}(S,x)$$

donc d'après (2.26), (2.33) et (2.34) nous aurons

$$\alpha\omega_S + (1-\alpha)\omega'_S \in \mathcal{H}^k[S, \alpha x+(1-\alpha)x']. \qquad (2.35)$$

La propriété de biconvexité de $v^k(S,\cdot)$ est alors la conséquence de la convexité de ϕ^k_S et de (2.27) et (2.35). ■

Corollaire 2.2: Si le jeu est linéaire convexe: $\forall\, k \in \mathbf{K} - K$, $\forall\, S \subset M$, $\forall\, x \in E^n$ $v^k(S,x)$ est un ensemble convexe dans R^S.

Démonstration: prendre $x = x'$ dans (2.29). ■

Théorème 2.6: Si le jeu est linéaire-convexe et si les fonctionnelles ϕ^k_j et γ^k_j sont *semi-continues inférieurement* et, si les ensembles U^k_j sont *compacts* alors on aura:

$$\forall\, S \subset M, \quad \forall\, k \in \mathbf{K} - K, \quad \forall\, x \in E^n$$

(i) $v^k(S,x)$ est *fermé*.

(ii) Si $(x_n)_{n\in N}$ et $(\omega_{S,n})_{n\in N}$ sont deux suites dans E^n et R^S respectivement telles que l'on ait:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \lim_{n\to\infty} \omega_{S,n} = \omega_S$$

et

$$\forall\, n \in N \qquad \omega_{S,n} \in v^k(S,x_n)$$

alors:

$$\omega_S \in v^k(S,x).$$

Démonstration: La propriété (ii) est vraie à l'étage K, en effet, selon (2.24) et la semi-continuité inférieure des ϕ_j^K pour $j \in S$ on aura:

$$\forall\, j \in S \qquad \phi_j^K(x) \le \lim_{n\to\infty} \phi_j^K(x_n) \le \lim_{n\to\infty} \omega_{j,n} = \omega_j \tag{2.36}$$

et donc:

$$\omega_S \in v^K(S,x).$$

Supposons que la propriété soit vraie à l'étage $k+1 \in \mathbb{K}$, montrons qu'elle reste vraie à l'étage k. On a, d'après le Théorème 2.4:

$$\omega_{S,n} \in v^k(S,x_n) \iff \exists\, u_{S,n}(k) \in U_S^k,$$

$$\exists\, \lambda_{S,n} \in \mathfrak{C}^{k+1}[S, A^k x_n + B_S^k u_{S,n}(k)] \quad \text{t.q.}$$

$$\omega_{S,n} = \phi_S^k(x_n) + \gamma_S^k[u_{S,n}(k)] + \lambda_{S,n}. \tag{2.37}$$

Comme U_S^k est compact on peut extraire de $(u_{S,n}(k))_{n\in N}$ une suite $(u_{S,\sigma(n)}(k))_{n\in N}$ qui converge vers $\bar{u}_S(k) \in U_S^k$. Posons:

$$\lambda_S = \omega_S - \lim_{n\to\infty} \{\phi_S^k(x_{\sigma(n)}) + \gamma_S^k[u_{S,\sigma(n)}(k)]\}$$

par la semi-continuité inférieure de ϕ_S^k et γ_S^k on a:

$$\omega_S \geq \phi_S^k(x) + \gamma_S^k[\bar{u}_S(k)] + \lambda_S. \qquad (2.38)$$

Pour vérifier la propriété (ii), d'après (2.26) et (2.27) il suffira de vérifier que l'on a bien:

$$\lambda_S \in \mathfrak{E}^{k+1}[S, A^k x + B_S^k \bar{u}_S(k)].$$

Or ceci est une conséquence de (2.25), du fait que la propriété (ii) soit vraie à l'étage k+1 et du fait que:

$$\lambda_S = \lim_{n\to\infty} \lambda_{S,\sigma(n)}$$

où:

$$\lambda_{S,\sigma(n)} \in \mathfrak{E}^{k+1}[S, A^k x_{\sigma(n)} + B_S^k u_{S,\sigma(n)}(k)].$$

Ceci établit donc la propriété (ii).

La propriété (i) est un corollaire de la propriété (ii). ■

2.5. Exemples

Soit le système défini par les données suivantes:

$$\mathbb{K} \triangleq \{0,1,2,3\}$$

$$X^k \triangleq \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \quad \forall\, k \in \mathbb{K}$$

$$M \triangleq \{1,2,3\}$$

$$U_j^0 \triangleq \{-1,1\} \quad j = 1,2$$

$$U_3^0 \triangleq \{0\}$$

$$U_j^1 \triangleq \{-1,1\} \quad j = 3,1$$

$$U_2^1 \triangleq \{0\}$$

$$U_j^2 \triangleq \{-1,1\} \quad j = 2,3$$

$$U_1^2 \triangleq \{0\}$$

et l'équation d'état:

$$x(k+1) = f^k[x(k),u_M(k)]$$

où:

$$\forall\, x(k), \quad \forall\, u_M(k) \quad f^k[x(k),u_M(k)] = \mathrm{Max}(0,\mathrm{Min}(9,x(k) + \sum_{j=1}^{3} u_j(k))).$$

Nous considérons en outre un coût défini seulement à l'état terminal x(3) pour chaque joueur. Les fonctions $\textcircled{H}_j$, $j \in \{1,2,3\}$ sont définies par le tableau suivant:

x(3)	$\textcircled{H}_1[x(3)]$	$\textcircled{H}_2[x(3)]$	$\textcircled{H}_3[x(3)]$
0	0	0	2
1	0	1	1
2	1	0	0
3	2	1	0
4	2	2	1
5	-1	1	2
6	1	2	-1
7	3	0	-1
8	2	1	0
9	0	-1	2

Pour construire les coeurs de ce jeu nous utiliserons le théorème 2.2 de la façon suivante.

(i) A l'étage 2 nous construirons à chaque état x(2) l'ensemble des *coûts accessibles* pour tous les joueurs; nous en déduirons alors les vecteurs de coût *Paréto-optimaux*; pour chaque vecteur de coût ω_M Paréto-optimal nous calculerons les ensembles $\underset{\sim}{X}^2(S,\omega_S)$ pour toutes les coalitions

$S \subset \{1,2,3\}$; revenant alors à la liste des coûts Paréto-optimaux pour chaque état x(2) nous ne retiendrons que les vecteurs ω_M pour lesquels on a:

$$x(2) \notin \underset{\sim}{X}^2(S,\omega_S)$$

pour former le coeur $\Omega^2[x(2)]$.

Pour effectuer ces calculs nous avons utilisé une représentation du jeu sous la forme du graphe décrit en figure 2.1.

L'opération peut être répétée à l'étage 1 et à l'étage 0. Les tableaux 2.1 à 2.6 contiennent le résultat de ces calculs.

Par souci d'économie d'espace les vecteurs de coût apparaissant dans les tableaux 2.1, 2.3 et 2.5 sont écrits de la façon suivante:

002 au lieu de (0,0,2)

cependant que les ensembles $\underset{\sim}{X}^k(S,\omega_S)$ sont décrits dans les tableaux 2.2, 2.4 et 2.6 de la façon suivante:

0123468 au lieu de {0,1,2,3,4,6,8}.

Figure 2.1: Graphe du jeu de l'exemple 2.1

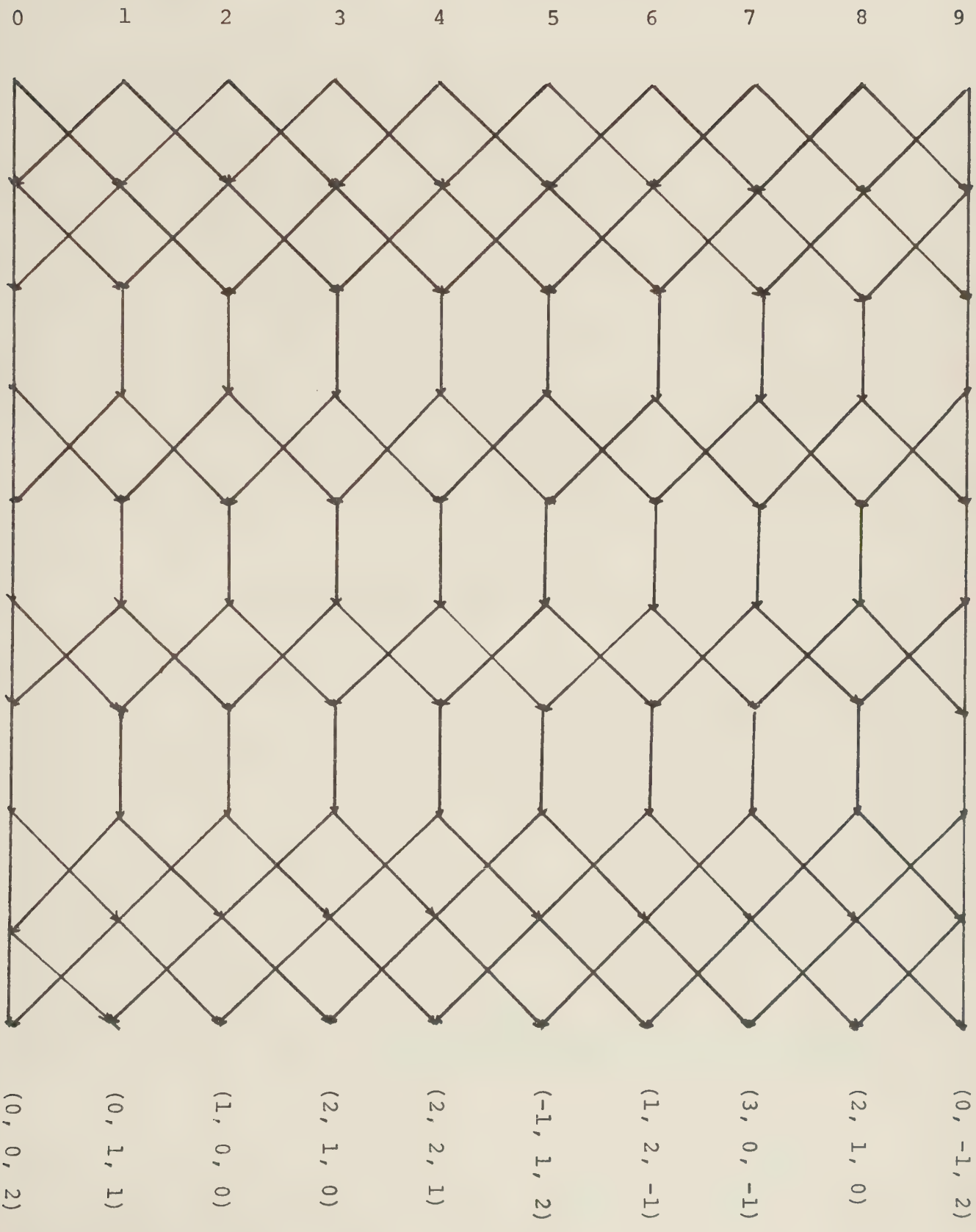


Tableau 2.1: Coûts accessibles, coûts Paréto-optimaux, coeurs en x(2).

x(2)	Coûts accessibles	Coûts Paréto-optimaux	$\Omega^2[x(2)]$
0	002,011,100	002,011,100	100
1	002,011,210	002,011,210	011,210
2	002,100,221	002,100	100
3	011,210,-112	011,210,-112	011,210
4	100,221,12-1	100,12-1	100,12-1
5	210,-112,30-1	210,-112,30-1	30-1
6	221,12-1,210	12-1,210	12-1,210
7	-112,30-1,0-12	-112,30-1,0-12	30-1,0-12
8	12-1,210,0-12	12-1,210,0-12	210
9	30-1,210,0-12	30-1,210,0-12	30-1

Tableau 2.2: Ensembles $\underset{\sim}{X}^2(S,\omega_S)$.

ω_M \ S	1	2	3	{1,2}	{2,3}	{3,1}
002	∅	∅	01234689	∅	∅	∅
011	∅	09	68	∅	024579	∅
100	∅	∅	∅	∅	∅	∅
210	0	09	∅	0	579	∅
-112	∅	09	01234689	∅	024579	∅
12-1	∅	0123789	∅	01	∅	∅
30-1	0123468	∅	∅	∅	∅	∅
0-12	∅	∅	01234689	∅	∅	∅

Tableau 2.3: Coûts accessibles, coûts Paréto-optimaux, coeurs en x(1).

x(1)	Gains accessibles	Gains Paréto-optimaux	$\Omega^1[x(1)]$
0	002,011,100,210,221	002,011,100	100
1	002,011,100,210,-112	002,011,100,-112	011,100
2	002,011,100,221,12-1	002,011,100,12-1	100,12-1
3	002,011,210,-112,30-1	002,011,210,-112,30-1	011,210
4	002,100,221,12-1,210	002,100,12-1	100,12-1
5	011,210,-112,30-1,0-12	011,210,-112,30-1,0-12	30-1,0-12
6	100,221,12-1,210,0-12	100,12-1,0-12	100,12-1
7	210,-112,30-1,0-12	210,-112,30-1,0-12	30-1,0-12
8	221,12-1,210,0-12,30-1	12-1,210,0-12,30-1	12-1,210
9	-112,30-1,0-12,12-1,210	-112,30-1,0-12,12-1,210	30-1

Tableau 2.4: Ensembles $\underset{\sim}{X}(S,\omega_S)$.

ω_M \ S	1	2	3	{1,2}	{2,3}	{3,1}
002	∅	∅	01234689	∅	∅	∅
011	∅	∅	68	∅	024579	∅
100	∅	∅	∅	∅	∅	∅
210	∅	∅	∅	∅	579	∅
-112	∅	∅	01234689	∅	024579	∅
12-1	∅	019	∅	01	∅	∅
30-1	0123468	∅	∅	∅	∅	∅
0-12	∅	∅	01234689	∅	∅	∅

Tableau 2.5: Coûts accessibles, coûts Paréto-optimaux, coeurs en x(0).

Coûts accessibles	Coûts Paréto-optimaux	$\Omega^0[x(0)]$
11,100,210,221,-112,12-1	002,011,100,-112,12-1	100
11,100,210,221,-112,12-1,30-1	002,011,100,-112,12-1,30-1	011,100
11,100,210,221,-112,12-1,30-1	002,011,100,-112,12-1,30-1	100
11,100,210,221,-112,12-1,30-1,0-12	002,011,100,-112,12-1,30-1,0-12	011,100
11,100,210,221,-112,12-1,30-1,0-12	002,011,100,-112,12-1,30-1,0-12	100,12-1
11,100,210,221,-112,12-1,30-1,0-12	002,011,100,-112,12-1,30-1,0-12	002,100,12-1,30-1,0-12
11,100,210,221,-112,12-1,30-1,0-12	002,011,100,-112,12-1,30-1,0-12	011,100,12-1
00,210,221,-112,12-1,30-1,0-12	011,100,-112,12-1,30-1,0-12	100,12-1,30-1,0-12
10,221,-112,12-1,30-1,0-12	100,-112,12-1,30-1,0-12	100,12-1
21,-112,12-1,30-1,0-12	210,-112,12-1,30-1,0-12	30-1

Tableau 2.6: Ensembles $\underset{\sim}{X}^0(S,\omega_S)$

ω_M \ S	1	2	3	{1,2}	{2,3}	{3,1}
002	∅	∅	0123468	∅	∅	∅
011	∅	∅	∅	∅	024579	∅
100	∅	∅	∅	∅	∅	∅
210	∅	∅	∅	∅	579	∅
-112	∅	∅	0123468	∅	024579	∅
12-1	∅	019	∅	0123	∅	∅
30-1	0123468	∅	∅	∅	∅	∅
0-12	∅	∅	0123468	∅	∅	∅

A l'aide du théorème 2.3 nous pouvons construire les ensembles Y^k et les super-coeurs.

Dans le tableau 2.7 nous décrivons les ensembles Y^k en indiquant les couples $(x(k), \omega_M(k))$ les constituant.

Tableau 2.7: Ensembles Y^k et super-coeurs.

x(k)	k=2	k=1	k=0
0	100	100	100
1	011,210	011,100	011,100
2	100	100,12-1	100
3	011,210	011,210	011,100
4	100,12-1	100,12-1	100,12-1
5	30-1	30-1,0-12	100,12-1,30-1
6	12-1,210	100,12-1	100,12-1
7	30-1,0-12	30-1,0-12	100,12-1,30-1,0-12
8	210	12-1,210	100,12-1
9	30-1	30-1	30-1
	$\overset{+}{\Omega}^2[x(2)]$	$\overset{+}{\Omega}^1[x(1)]$	$\overset{+}{\Omega}^0[x(0)]$

Nous pouvons constater sur cet exemple que le coeur

$$\Omega^0(6) = \{011,100,12\text{-}1\}$$

diffère du super-coeur:

$$\overset{+}{\Omega}^0(6) = \{100,12\text{-}1\}.$$

En effet, le vecteur de coût (0,1,1) est Paréto-optimal en x(0) = 6 et il est dans le coeur du jeu car aucune coalition ne peut bloquer ce vecteur en x(0) = 6. Pour obtenir ce coût les joueurs peuvent utiliser la commande:

$$\tilde{u}^0 = ((-1,-1,0),(1,0-1),(0,-1,-1))$$

engendrant le chemin:

$$\tilde{x}^0 = (6,4,4,2).$$

Or en x(1) = 4 le vecteur de coût (0,1,1) est bloqué par la coalition {2,3} qui en jouant $u^{\dagger}_{\{2,3\}}(1) = (0,-1)$ est assurée d'avoir, soit x(2) = 4, soit x(2) = 2. Or en jouant alors:

$$u^{\dagger}_{\{2,3\}}(2) \triangleq \mu^2_{\{2,3\}}[2] = (1,-1)$$

$$u^{\dagger}_{\{2,3\}}(2) \triangleq \mu^2_{\{2,3\}}[4] = (-1,-1)$$

la coalition {2,3} s'assure le vecteur de coût (0,0).

On pourrait vérifier que les autres chemins Paréto-optimaux donnant le coût (0,1,1) et issus de x(0) = 6 contiennent aussi un état x(1) ou x(2) ou la coalition {2,3} bloque le vecteur (1,1).

Exemple 2.2:

Considérons le jeu défini par:

$$\mathbb{K} \triangleq \{0,1,2\}$$

$$X^k \triangleq E^2$$

$$M \triangleq \{1,2,3\}$$

$$x(k+1) = x(k) + \sum_{j=1}^{3} u_j(k) \qquad k = 0,1$$

$\forall\, k \in \mathbb{K} - K$, $\forall\, j \in M$, $U_j^k \triangleq \{u_j(k) \in E^2 : \|u_j(k)\| < \alpha_j^k\}$, $\alpha_j^k > 0$ donné

et le coût défini à l'état terminal seulement par:

$$\forall\, j \in M \quad \phi_j^K : x(2) \to \langle z_j, x(2) \rangle,\ z_j \text{ donné dans } E^2,\ \|z_j\| = 1.$$

Ce jeu est étudié par Haurie (1975) en utilisant le théorème 2.4 pour construire les fonctions caractéristiques. On obtient alors, pour des valeurs particulières données aux paramètres α_j^k et aux vecteurs z_j un cas où une commande engendrant un coût contenu dans le coeur $\Omega^0[x(0)]$ n'est cependant pas C-optimale. Ce jeu est d'autre part linéaire-convexe, donc les fonctions caractéristiques vérifieront les théorèmes 2.5 et 2.6.

2.6. Conclusion.

Nous avons généralisé la notion de fonction caractéristique et de coeur du jeu au contexte des jeux quantitatifs multi-étages. A partir de considérations inspirées de la théorie de l'accessibilité des systèmes perturbés et de la programmation dynamique nous avons caractérisé le coeur et le super-coeur du jeu dans l'espace d'état. Pour un jeu séparable nous avons proposé un algorithme permettant de calculer les fonctions caractéristiques du jeu. Le point majeur de ce chapitre a été la mise en évidence du fait qu'un vecteur de coût contenu dans le coeur du jeu en x(i) peut néanmoins être bloqué par une coalition, à un étage ultérieur, le long du chemin Paréto-optimal engendrant ce vecteur de coût. Nous avons proposé une nouvelle notion d'optimalité, baptisée *C-optimalité* associée à la notion de *super-coeur* qui nous parait être la notion d'optimalité coopérative appropriée à un contexte dynamique.

ANNEXE 2.1

Reprinted from JOURNAL OF OPTIMIZATION THEORY AND APPLICATIONS Vol. 13, No. 3, March 1974
Printed in Belgium

Individual and Collective Rationality in a Dynamic Pareto Equilibrium[1]

A. HAURIE[2] AND M. C. DELFOUR[3]

Communicated by G. Leitmann

Abstract. This paper deals with the problem of establishing the conditions for individual and collective rationality when a set of players cooperate in a Pareto equilibrium. To derive such conditions one follows the approach of the theory of reachability of perturbed systems. Open-loop and closed-loop concepts are discussed and are shown to be nonequivalent.

Key Words. Multistage games, multicriteria optimization, minimax problems, n-person games, linear systems.

1. Introduction

The notion of a Pareto equilibrium is commonly used for the study of cooperative dynamic games (see Refs. 1–6). The object of this paper is to study the individual and collective rationality underlying the participation of decision-makers in a Pareto equilibrium for a multistage system where coalitions are permitted.

More precisely, a Pareto equilibrium is said to be *individually optimal* (I-optimal) when no decision-maker, at any stage, in the situation where all other decision-makers decide to cooperate in minimizing his gain, can provide himself a higher gain than what he obtains in the

[1] The research of the first author was supported in part by Canada Council Grant No. S-701-491 and has benefited from collaboration with the Laboratoire d'Automatique Théorique de l'Université de Paris VII, Paris, France.

[2] Professeur Agrégé, École des Hautes Études Commerciales, Montréal, Canada.

[3] Chercheur Invité, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, Montréal, Canada.

© 1974 Plenum Publishing Corporation, 227 West 17th Street, New York, N.Y. 10011. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, microfilming, recording, or otherwise, without written permission of the publisher.

Pareto equilibrium. Analogously, a Pareto equilibrium is *collectively optimal* (C-optimal) when, at any stage, no coalition of a subset of the decision-makers can *assure* each of its members a higher gain than what he can get by full cooperation with all the other decision-makers.

Cooperative games where coalitions are permitted are commonly studied in characteristic form (see Ref. 7) and important notions of optimality are the *set of imputations* and the *core of the game*. I-optimality and C-optimality make it possible to extend these notions to dynamic multistage games. This is not a straightforward generalization because of the closed-loop definitions which are natural to adopt in dynamic games with perfect information.

Section 2 contains the main definitions. In Section 3, we introduce the concepts of I- and C-optimality and discuss the information structure of the game. In Section 4, we characterize I- and C-optimality in the space of gains and give constructive definitions of the set of imputations and the core of the game. In Section 5, we specialize the system of Section 2 and present a formal algorithm to characterize C-optimal decision sequences. In Section 6, a simple example is worked out, to show the difference between open-loop and closed-loop concepts.

Results on qualitative multistage games coalitions have been reported by Blaquiere and Wiese (Ref. 8). However, this paper is technically closer to the reachability theory for perturbed systems, since, given a coalition of decision-makers, the action of all other decision-makers is considered as a perturbation (see Refs. 9–11). The reader will notice that all the results presented can be applied to sequential machines.

Notation. Given any set S, $\mathcal{P}(S)$ will denote the set of all subsets of S, and $\mathbb{R}$ the set of real numbers.

We use indifferently the words *decision-maker* and *player*.

2. Definition of the System, Gain Functionals, and Pareto Equilibria

Let F be an arbitrary set and let $K \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ be integers. We define the time set $\mathbb{K} \triangleq \{0, 1,..., K\}$, the *set of players* $M \triangleq \{1, 2,..., m\}$, and a dynamic multistage system

$$x(k+1) = f^k(x(k), u_M(k)), \qquad k = 0, 1,..., K-1, \tag{1-1}$$

$$x(0) = x^0, \tag{1-2}$$

where

(i) for each $j \in M$ and for each $k \in \mathbb{K} - K$, $U_j(k) \neq \varnothing$ is the *decision set* of Player j at stage k and $u_j(k) \in U_j(k)$ is an *admissible decision* of Player j at stage k;

(ii) $U_M(k) \triangleq \prod_{j \in M} U_j(k)$ and $u_M(k) \triangleq (u_j(k))_{j \in M} \in U_M(k)$

are the decision set and the admissible decision of the set of all players at stage k;

(iii) for all $k \in \mathbb{K}$, $x(k)$ is the value of the state variable at stage k, and $x^0 \in F$ is the given state at stage 0;

(iv) $f^k : F \times U(k) \to F$, $k = 0, 1, \ldots, K - 1$, is a sequence of given maps.

An *admissible decision sequence* will be defined as an element

$$\tilde{u}_M \triangleq (u_M(k))_{k \in \mathbb{K} - K} \in \prod_{k \in \mathbb{K} - K} U_M(k).$$

Given the initial state x^0 at stage 0 and an admissible decision sequence, we denote by

$$\tilde{x}(\cdot; x^0, \tilde{u}_M) : \mathbb{K} \to F$$

the trajectory emanating from $(0, x^0) \in \mathbb{K} \times F$ generated by $\tilde{u}_M$. For $i \in \mathbb{K}$ and $x^i \in F$, we adopt the notations

$$\mathbb{K}^i \triangleq \{i, i+1, \ldots, K\}, \qquad \tilde{u}_M{}^i \in \prod_{k \in \mathbb{K}^i - K} U_M(k);$$

then,

$$\tilde{x}^i(\cdot; x^i, \tilde{u}_M{}^i) : \mathbb{K}^i \to F$$

is the *trajectory* emanating from x^i at stage i, generated by $\tilde{u}_M{}^i$.

A *coalition* S is defined as a nonempty subset of M. For a coalition, we shall use the products

$$U_S(k) \triangleq \prod_{j \in S} U_j(k), \qquad U_{M-S}(k) \triangleq \prod_{j \in M-S} U_j(k)$$

and the notations

$$\tilde{u}_S \in \prod_{k \in \mathbb{K} - K} U_S(k), \qquad \tilde{u}_{M-S} \in \prod_{k \in \mathbb{K} - K} U_{M-S}(k)$$

for the admissible decision sequences of the coalition S and of the set $M - S$ of all other players respectively.

We associate with each player a *gain functional* $g_j : F \to \mathbb{R}$. For the system (1) in state x^i in F at stage i, we define the gain

$$V_j(i, x^i, \tilde{u}_M{}^i) \triangleq g_j(\tilde{x}^i(K; x^i, \tilde{u}_M{}^i))$$

of the jth player along the trajectory $\tilde{x}^i(\cdot; x^i, \tilde{u}_M{}^i)$.

First we shall recall the definition of a Pareto equilibrium.

Definition 2.1. Given an initial state x^i at stage i, an admissible decision sequence $(\tilde{u}_M{}^i)^*$ defines a *Pareto equilibrium* at (i, x^i) if, for any admissible decision sequence $\tilde{u}_M{}^i$ with the property that

$$V_j(i, x^i, \tilde{u}_M{}^i) \geqslant V_j(i, x^i, (\tilde{u}_M{}^i)^*) \qquad \forall\, j \in M,$$

we necessarily obtain

$$V_j(i, x^i, \tilde{u}_M{}^i) = V_j(i, x^i, (\tilde{u}_M{}^i)^*) \qquad \forall\, j \in M.$$

Such a sequence is said to be *Pareto-optimal* at (i, x^i).

Remark 2.1. Strictly speaking, a decision sequence $(\tilde{u}_M{}^i)^*$ which defines a Pareto equilibrium is dependent on the initial state x^i and should be written as $(u_M{}^i(\cdot; x^i))^*$.

Remark 2.2. Pareto equilibrium is a full-cooperation notion of optimality. The absence of perturbations due to conflicts between players makes unnecessary the use of a closed-loop definition.

3. I-Optimality, C-Optimality, and the Sets $X^k(S, \omega^S)$

3.1. Definitions. Let S be a coalition. An ordered sequence $\{\omega_j\}_{j \in S}$ of real numbers ω_j will be called a *gain vector* for S and written as ω_S.

Definition 3.1. Given a coalition S and two gain vectors $\omega_S{}^1$ and $\omega_S{}^2$, we say that $\omega_S{}^2$ *dominates* $\omega_S{}^1$ if $\omega_j{}^2 \geqslant \omega_j{}^1\ \forall\, j \in S$ and there exists $l \in S$ such that $\omega_l{}^2 > \omega_l{}^1$.

Definition 3.2. Given an initial state x^0 at stage 0, a Pareto-optimal decision sequence $\tilde{u}_M{}^*$ generating a trajectory $\tilde{x}^*$,

$$\tilde{x}^*(k) \triangleq \tilde{x}(k; x^0, \tilde{u}_M{}^*), \qquad \forall\, k \in \mathbb{K},$$

is said to be *C-optimal* at $(0, x^0)$ if, for any coalition S and any initial stage i in $\mathbb{K} - K$, the following property is true:

$$\forall u_S(i)\ \exists u_{M-S}(i) \text{ s.t. } \forall u_S(i+1)\ \exists u_{M-S}(i+1) \ldots \text{ s.t.}$$
$$\forall u_S(K-1)\ \exists u_{M-S}(K-1)$$

such that the admissible decision sequences $\tilde{u}_S{}^i$ and $\tilde{u}^i_{M-S}$ thus defined generate a gain vector

$$\omega_S \triangleq \{V_j(i, \tilde{x}^*(i), (\tilde{u}_S{}^i, \tilde{u}^i_{M-S}))\}_{j\in S}$$

which does not dominate the gain vector

$$\omega_S{}^* \triangleq \{V_j(0, x^0, \tilde{u}_M{}^*)\}_{j\in S}\,.$$

Remark 3.1. C-optimality corresponds to the case where there is no way for a coalition S to *assure* its members a gain vector dominating the gain vector obtained through full cooperation, from any state of the Pareto-optimal trajectory. In this case, there is *collective rationality* in the Pareto equilibrium.

Definition 3.3. If we restrict the class of coalitions considered to be constituted only of one decision-maker subsets

$$S \triangleq \{j\}, \qquad \forall j \in M,$$

and if the characteristic property of Definition 3.2 is true for this subclass of coalitions, we shall say that the Pareto-optimal sequence is *I-optimal at* $(0, x^0)$.

Remark 3.2. Obviously, I-optimality is less restrictive than C-optimality. A Pareto equilibrium is *individually rational* if there is no way for each player to *assure* himself more than what he will obtain in the Pareto equilibrium, and this from any state of the Pareto-optimal trajectory.

3.2. Links with Reachability Theory. Closed-loop reachability of target sets can be used to characterize I- and C-optimality.

Proposition 3.1. Given an initial state x^0 at stage 0 and a decision sequence $\tilde{u}_M{}^*$, let

$$\omega_M{}^* \triangleq \{V_j(0; x^0, \tilde{u}_M{}^*)\}_{j\in M}\,.$$

For all coalitions S, one constructs the sequence

$$\{X^k(S, \omega_S^*)\}_{k\in\mathbb{K}}$$

of subsets of F as follows:

(i) $X^K(S, \omega_S^*) \triangleq \{x \in F : \omega_S \triangleq \{g_j(x)\}_{j\in S}$ dominates $\omega_S^*\}$;

(ii) for all $k \in \mathbb{K} - K$, $X^k(S, \omega_S^*)$ is defined in terms of $X^{k+1}(S, \omega_S^*)$ as the set of all x in F for which there exists an admissible decision $u_S(k)$ such that, for all admissible decisions $u_{M-S}(k)$, the following property is true:

$$f^k(x, (u_S(k), u_{M-S}(k))) \in X^{k+1}(S, \omega_S^*).$$

Then, the following assertions hold:

(a) $\tilde{u}_M^*$ is I-optimal at $(0, x^0)$ iff it is Pareto-optimal at $(0, x^0)$ and generates a trajectory $\tilde{x}^*$ such that

$$\forall j \in M, \qquad \forall k \in \mathbb{K} - K \; \tilde{x}^*(k) \notin X^k(\{j\}, \omega_j^*);$$

(b) $\tilde{u}_M^*$ is C-optimal at $(0, x^0)$ iff

$$\forall S \subset M, \qquad \forall k \in \mathbb{K} - K \; \tilde{x}^*(k) \notin X^k(S, \omega_S^*).$$

Proof. By construction, the state x^k is in $X^k(S, \omega^*)$ iff the following is true:

$$\exists u_S(k) \text{ s.t.} \quad \forall u_{M-S}(k) \quad \exists u_S(k+1) \text{ s.t.} \quad \forall u_{M-S}(k+1)$$

$$\ldots \exists u_S(K-1) \text{ s.t.} \quad \forall u_{M-S}(K-1)$$

the gain vector

$$\omega_S \triangleq \{V_j(k; x^k, (\tilde{u}_S^k, \tilde{u}_{M-S}^k))\}_{j\in S}$$

dominates ω_S^*. Then, the proof is by definition.

Remark 3.3. With the preceding notations, if x^0 is not in $X^0(M, \omega_M^*)$, then $\tilde{u}^*$ is Pareto-optimal at $(0, x^0)$.

The set $X^K(S, \omega_S^*)$ may be interpreted as a *target at stage K* for coalition S.

If full cooperation is not achieved, then coalition S may consider the decisions of the other decision-makers as unknown perturbations of the system.

$X^k(S, \omega_S^*)$ is the set of initial states at stage k from which the target $X^K(S, \omega_S^*)$ is reachable at stage K by S for any decision sequence $\tilde{u}_{M-S}^k$ of $M - S$.

3.3. Closed-Loop, Open-Loop, and Information Structure. In the construction of the sets $X^k(S, \omega_S{}^*)$, we have implicitly assumed that a coalition S can observe without error the state of the system at each stage. If such an information is not allowed to the decision-makers, it is possible to adopt an open-loop point of view.

Definition 3.4. Given an initial stage x^0 at stage 0, a Pareto-optimal decision sequence $\tilde{u}_M{}^*$ generating a trajectory $\tilde{x}^*$ is said to be *open-loop C-optimal at* $(0, x^0)$ if, for any coalition S, any initial stage i in $\mathbb{K} - K$, and any admissible decision sequence $\tilde{u}_S{}^i$, there exists an admissible decision sequence $\tilde{u}^i_{M-S}$ such that the gain vector

$$\omega_S \triangleq \{V_j(i; \tilde{x}^*(i), (\tilde{u}_S{}^i, \tilde{u}^i_{M-S}))\}_{j\in S}$$

does not dominate

$$\omega_S{}^* \triangleq \{V_j(0; x^0, \tilde{u}_M{}^*)\}_{j\in S}.$$

Open-loop I-optimality is defined similarly.

A straightforward consequence of Definitions 3.2 and 3.4 is the following.

Proposition 3.2. If $\tilde{u}_M{}^*$ is C-optimal at $(0, x^0)$, then it is *open-loop* C-optimal at $(0, x^0)$.

The converse is not true as will be seen in Section 6.

For multistage games with perfect information, the closed-loop notions are the natural ones when we do not consider full cooperation of all decision-makers.

4. Imputations and Core of the Game

In this section, we show that the concept of I- and C-optimality can also be described in the *space of gains* (see Refs. 7 and 12). The reader will notice that there are obvious differences between the definitions which we shall introduce below and the standard definitions in m-person game theory. However, they are conceptually similar.

Given a coalition S, we denote by $\mathbb{R}^S$ the product $\prod_{j\in S} \mathbb{R}$.

Definition 4.1. Given a coalition S, the map

$$(k, x) \mapsto v^k(x, S) : \mathbb{K} \times F \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^S),$$

defined as

$$v^k(x, S) \triangleq \{\omega_S \in \mathbb{R}^S : x \in X^k(S, \omega_S)\},$$

is called the *characteristic function of the game.*

When the system (1) is in state x at stage k, then the coalition S can obtain a gain vector dominating any ω_S in $v^k(x, S)$ whatever be the action of the other players.

Definition 4.2. Let $(k, x) \in (\mathbb{K} - K) \times F^n$ We denote by $\mathscr{V}^k(x)$ the *set of imputations at* (k, x). An *imputation at* (k, x) is a gain vector $\omega_M \in \mathbb{R}^M$ such that

(i) there exists an admissible decision sequence $(\tilde{u}_M{}^k)^*$ which defines a Pareto equilibrium at (k, x) such that

$$\omega_j = V_j(k, x, (\tilde{u}_M{}^k)^*) \qquad \forall j \in M;$$

(ii) $\forall j \in M, \qquad \omega_j \notin v^k(x, \{j\})$.

Remark 4.1. Property (ii) is commonly referred to as *individual rationality.*

Proposition 4.1. Let $\tilde{u}^*$ be I-optimal at $(0, x^0)$, and let $\omega_j{}^* = V_j(0, x^0, \tilde{u}_M{}^*)$ $\forall j \in M$. Then, at each stage $k \in \mathbb{K} - K$, $\omega_M{}^* \in \mathscr{V}^k(\tilde{x}(k; x^0, \tilde{u}_M{}^*))$.

Proof. It is well known (see Refs. 1–6), that, if $\tilde{u}_M{}^*$ is a Pareto-optimal decision sequence at $(0, x^0)$, then, for all k in $\mathbb{K}$, $(\tilde{u}_M{}^*)^k$ is a *Pareto-optimal decision sequence* at $(k, \tilde{x}^*(k))$, where $\tilde{x}^*(k) \triangleq \tilde{x}(k; x^0, \tilde{u}_M{}^*)$. Then, the proof is by definition.

Definition 4.3. Let $(k, x) \in (\mathbb{K} - K) \times F$. We denote by $\mathscr{C}^k(x)$ the *core of the game* at (k, x), which is defined as the set of all gain vectors $\omega_M \in \mathbb{R}^M$ such that

(i) there exists an admissible decision sequence $(\tilde{u}_M{}^*)^k$ which defines a Pareto equilibrium at (k, x) such that

$$\omega_j \triangleq V_j(k, x, (\tilde{u}_M{}^*)^k) \qquad \forall j \in M;$$

(ii) for all coalitions S, $\omega_S \notin v^k(x, S)$.

Remark 4.2. By definition, $\mathscr{C}^k(x) \subset \mathscr{V}^k(x)$. Property (ii) will also be referred to as *collective rationality.*

Proposition 4.2. Let $\tilde{u}_M^*$ be C-optimal at $(0, x^0)$ and let

$$\omega_j^* \triangleq V_j(0, x^0, \tilde{u}_M^*) \qquad \forall j \in M.$$

Then, at each stage $k \in \mathbb{K} - K$,

$$\omega_M^* \in \mathscr{C}^k(\tilde{x}(k; x, \tilde{u}_M^*)).$$

Proof. The proof is similar to the proof of Proposition 4.1.

5. Algorithm for Finding C-Optimal Decision Sequences

This section is concerned with a backward algorithm for the construction of the set of all initial states for which there exists a C-optimal decision sequence generating a given gain vector. However, this construction requires a specialization to the case where F is a semigroup and system (1) is of the following form:

$$x(k+1) = q^k(x(k)) + \sum_{j \in M} h_j^k(u_j(k)), \tag{2-1}$$

$$x(0) = x^0, \tag{2-2}$$

where

$$q^k : F \to F, \qquad k = 0, \ldots, K-1,$$

$$h_j^k : U_j(k) \to F, \qquad \forall j \in M,\ k = 0, \ldots, K-1,$$

are given maps.

For this problem we can now adapt some techniques developed in Refs. 9–11. More precisely, consider the following steps.

Step (1). Choose $\omega_M \in \mathbb{R}^m$.

Step (2). Define $C^K(\omega_M) \triangleq \{x : g_j(x) = \omega_j \ \forall\, j \in M\}$.

Step (3). Define, for all $S \subset M$, $S \neq \varnothing$,

$$X^K(S, \omega_S) \triangleq \{x : g_j(x) \geqslant \omega_j \ \forall j \in S,\ g_l(x) > \omega_l \quad \text{for some} \quad l \in S\}.$$

Step (4). Take $k = K$.

Step (5). Define

$$T^{k-1}(\omega_M) \triangleq \{x : \exists u_M(k) \in U_M(k) \text{ s.t. } q^{k-1}(x) + \sum_{j \in M} h_j^{k-1}(u_j(k-1)) \in C^k(\omega_M)\}.$$

Step (6). Define, for all $S \subset M$, $S \neq \varnothing$, the set

$$M^{k-1}(S, \omega_S) \triangleq \{x : x + \sum_{j \in M-S} h_j^{k-1}(u_j(k)) \in X^k(S, \omega_S) \; \forall u_{M-S}(k) \in U_{M-S}(k)\}$$

and the set

$$X^{k-1}(S, \omega_S) \triangleq \{x : \exists u_S(k) \in U_S(k) \text{ s.t. } q^{k-1}(x) + \sum_{j \in S} h_j^{k-1}(u_j(k)) \in M^{k-1}(S, \omega_S)\}.$$

Step (7). Form

$$C^{k-1}(\omega_M) \triangleq T^{k-1}(\omega_M) \bigcap \Big(\bigcap_{\substack{S \subset M \\ S \neq \varnothing}} \bar{X}^{k-1}(S, \omega_S) \Big),$$

where the bar denotes the complementary set w.r.t. F.

Step (8). If $C^{k-1}(\omega_M) \neq \varnothing$, take $k-1$ instead of k and go to Step (5). If $C^{k-1}(\omega_M) = \varnothing$, stop. Then, $C^i(\omega_M) = \varnothing$ for all $i \leqslant k-1$.

Proposition 5.1. With the preceding notations, $C^0(\omega_M)$ is the set of all states x at stage 0 such that there exists a decision sequence $\tilde{u}_M{}^*$ which is C-optimal at $(0, x)$ and such that

$$V_j(0, x^0, \tilde{u}_M{}^*) = \omega_j \qquad \forall j \in M.$$

Proof. *Necessity.* If $x \in C^0(\omega_M)$ then, $\forall\ S \subset M$, $S \neq \varnothing$, $x \notin X^0(S, \omega_S)$. Then, there exists $u_M(0) \in U_M(0)$ such that

$$q^0(x) + \sum_{j \in M} h_j{}^0(u_j(k)) \in C^1(\omega_M).$$

By repeating this construction, one defines a control sequence $\tilde{u}_M$ generating a trajectory $\tilde{x}(\cdot; x, \tilde{u}_M)$ emanating from $(0, x)$, avoiding all sets

$$X^l(S, \omega_S), \qquad \forall S \subset M, S \neq \varnothing, \qquad \forall l = 0, 1, \ldots, K,$$

and such that

$$\tilde{x}^k(K; x, \tilde{u}_M{}^k) \in C^K(\omega_M).$$

Therefore $\tilde{u}_M$ is C-optimal at $(0, x)$ and

$$V_j(0, x; \tilde{u}_M) = \omega_j \qquad \forall j \in S.$$

Sufficiency. If $\tilde{u}_M$ is C-optimal at $(0, x)$ generating a trajectory with gains $V_j(0, x, \tilde{u}_M) = \omega_j$, then the terminal state $\tilde{x}(K; x, \tilde{u}_M)$ is in $C^K(\omega_M)$ and, following Proposition 3.1 on C-optimality, it is easy to show that $x \in C^0(\omega_M)$.

6. Example

To show the nonequivalence of open-loop and closed-loop concepts consider the following system:

$$x(k+1) = x(k) + \sum_{j=1}^{3} u_j(k),$$

where

$$k \in \mathbb{K} \triangleq \{0, 1, 2\}, \qquad j \in M \triangleq \{1, 2, 3\},$$
$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$
$$u_1 \in U_1 \triangleq \{(0, 2), (-1, 2)\},$$
$$u_2 \in U_2 \triangleq \{(0, 2), (1, 2)\},$$
$$u_3 \in U_3 \triangleq \{y \in \mathbb{R}^2 : \| y \| = 1\},$$

with the gain functionals defined by

$$g_1(x) = -|x_1|, \qquad g_2(x) = x_2$$

for decision-makers 1 and 2, respectively. We are interested in the construction of sets

$$X^k(\{1, 2\}, \omega_{\{1,2\}});$$

therefore, we do not need to specify the gain functional of the third decision-maker.

Consider the gain vector

$$\omega_{\{1,2\}} \triangleq (-2, 8).$$

Then, we have

$$X^2(\{1, 2\}, \omega_{\{1,2\}}) = \{x : |x_1| \leqslant 2 \text{ and } x_2 > 8 \text{ or } |x_1| < 2 \text{ and } x_2 \geqslant 8\}.$$

Following Step (6) of the preceding algorithm, we shall construct the sets

$$M^1(\{1, 2\}, \omega_{\{1,2\}}) = \{x : |x_1| \leqslant 1 \text{ and } x_2 > 9 \text{ or } |x_1| < 1 \text{ and } x_2 \geqslant 9\},$$

$$X^1(\{1, 2\}, \omega_{\{1,2\}}) \triangleq \{x : x + u_1 + u_2 \in M^1(\{1, 2\}, \omega_{\{1,2\}})\}$$
$$= \{x : |x_1| \leqslant 2 \text{ and } x_2 > 5 \text{ or } |x_1| < 2 \text{ and } x_2 \geqslant 5\}.$$

Now, we construct the sets

$$M^0(\{1, 2\}, \omega_{\{1,2\}}) = \{x : |x_1| \leqslant 1 \text{ and } x_2 > 6 \text{ or } |x_1| < 1 \text{ and } x_2 \geqslant 6\},$$
$$X^0(\{1, 2\}, \omega_{\{1,2\}}) = \{x : |x_1| \leqslant 2 \text{ and } x_2 > 2 \text{ or } |x_1| \leqslant 2 \text{ and } x_2 \geqslant 2\}.$$

In Fig. 1, the construction of these sets has been illustrated.

The point $(-1/2, 5/2)$ is in

$$X^0(\{1, 2\}, \omega_{\{1,2\}}),$$

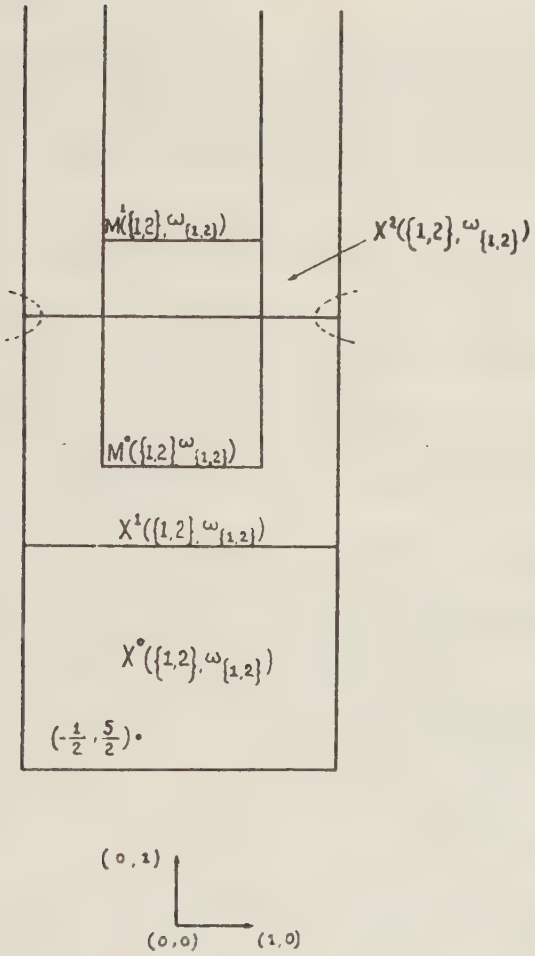


Fig. 1

but it is readily seen that there exists no decision sequence

$$\tilde{u}_{\{1,2\}} = (u_{\{1,2\}}(0), u_{\{1,2\}}(1))$$

such that, for all decision sequences $\tilde{u}_3 = (u_3(0), u_3(1))$, the trajectory emanating from $(-1/2, 5/2)$ and generated by $(\tilde{u}_{\{1,2\}}, \tilde{u}_3)$ reaches the target

$$X^2(\{1, 2\}, \omega_{\{1,2\}})$$

at Stage (2). Therefore, *open-loop* C-optimality is less restrictive than C-optimality.

References

1. STARR, A. W., and HO, Y. C., *Nonzero-Sum Differential Games*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 3, No. 3, 1969.
2. STARR, A. W., and HO, Y. C., *Further Properties of Nonzero-Sum Differential Games*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 3, No. 4, 1969.
3. VINCENT, T. L., and LEITMANN, G., *Control Space Properties of Cooperative Games*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 6, No. 2, 1970.
4. BLAQUIERE, A., *Sur la Géométrie des Surfaces de Pareto d'un Jeu Différentiel à N Joueurs*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris, Séries A, Vol. 271, No. 15, 1970.
5. BLAQUIERE, A., JURICEK, L., and WIESE, K. E., *Sur la Géométrie des Surfaces de Pareto d'un Jeu Différentiel à N Joueurs; Théorème du Maximum*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris, Séries A, Vol. 271, No. 20, 1970.
6. HAURIE, A., *Jeux Quantitatifs à M Joueurs*, Université de Paris, Paris, France, Doctoral Dissertation, 1970.
7. AUMANN, R. J., *A Survey of Cooperative Games without Side Payments*, Essays in Mathematical Economics, Edited by M. Shubik, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1969.
8. BLAQUIERE, A., and WIESE, K. E., *Jeux Qualitatifs Multi-Étages à N Personnes, Coalitions*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris, Séries A, Vol. 270, No. 19, 1970.
9. DELFOUR, M. C., and MITTER, S. K., *Reachability of Perturbed Linear Systems and Min Sup Problems*, SIAM Journal on Control, Vol. 7, No. 4, 1969.
10. BERTSEKAS, D. P., and RHODES, I. B., *On the Minimax Reachability of Targets and Target Tubes*, Automatica, Vol. 7, No. 2, 1971.
11. GLOVER, J. D., and SCHWEPPE, F. C., *Control of Linear Dynamic Systems with Set Constrained Disturbances*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-16, No. 5, 1971.
12. LUCAS, W. F., *Some Recent Developments in n-Person Game Theory*, SIAM Review, Vol. 13, No. 4, 1971.
13. KUHN, H. W., and SZEGO, G. P., *Differential Games and Related Topics*, North Holland, Amsterdam, Holland, 1971.

Printed by the St Catherine Press Ltd., Tempelhof 37, Bruges, Belgium.

n Some Properties of the Characteristic Function d the Core of a Multistage Game of Coalitions

ALAIN HAURIE, MEMBER, IEEE

ict—The Characteristic Function and the Core of a game de- by a multistage control system, are studied. It is shown that the of Core must be strengthened to provide collective rationality in a ge game with feedback strategies. A dynamic programming n is proposed to compute the characteristic function of a game d by a linear system.

I. Introduction

is short paper some properties of the Core and of the eristic Function of a multistage m-player game without side s are explored. These concepts have been extensively studied for n normal form or in characteristic function form [1]–[6]. Our jective is to show how these concepts developed in static games ot be extended directly to dynamic games. For that purpose we trict the class of strategies to feedback controls and the dynami- m to a multistage process. The results obtained for that particu- of dynamic games are *a fortiori* true in a more general setting ve games or differential games with mixed or behavioral strate-

ction II, using an approach inspired from the control of per- ystems [7]–[10], the concepts of Characteristic Function and the of Core are extended to multistage games with feedback strate- en the concept of C-optimality will be proposed. A C-optimal sequence is Pareto optimal and is also collectively rational, i.e., no way for a coalition S to assure its members a cost vector ed by the cost vector obtained through full cooperation, from e of the Pareto optimal trajectory. More precisely, a cost vector ned in the core at the initial state at stage i if this cost is Pareto and if no coalition can assure at this state a lower cost to each of bers. However, along a Pareto optimal trajectory generating a tor contained in the Core it may be possible that, at a later stage areto optimal cost vector is no more contained in the Core; thus on could assure a lower cost to each of its members by cooperat- veen stages i and $k-1$ and then switching to a noncooperative at stage k. A C-optimal control sequence will be such that, at e k, the Pareto optimal cost will be contained in the Core.

ction III, it is shown that when the dynamical system is described near difference equation the construction of the characteristic can be obtained in a manner similar to the method used by D. s [8] for minimax control problems. Finally, in Section IV, an shows the difference between the concepts of C-optimality and e.

ons: A vector $w \in R^p$ is *dominated* by a vector $w' \in R^p$ if w $_1, \cdots, _p$, $w' = \{w'_j\}_{j=1,\cdots,p}$ $w \neq w'$ and $w'_j \geq w_j . \forall j \in \{1, \cdots, p\} w$ *ly dominated* by w' if: $w'_j > w_j \ \forall j \in \{1, \cdots, p\}$.

II. The Characteristic Function, the Core, and C-Optimal Control Sequences for a Multistage Game of Coalitions

der the multistage dynamic system

$$x(k+1) = f^k[x(k), u_M(k)], \qquad k = 0, \cdots, K-1 \tag{2.1}$$

where $x(k) \in E^n$, $k = 0, 1, \cdots, K$ is the state vector, $M \triangleq \{1, 2, \cdots, m\}$ the set of players,

$$u_j(k) \in U_j^k \subseteq E^{\nu} \quad \text{and} \quad u_M(k) \in \coprod_{j \in M} U_j^k, \qquad k = 0, 1, \cdots, K-1$$

are the control vectors of each player $j \in M$ and of the set of all players M, respectively.

A coalition S is a subset of M. For a given coalition S denote

$$u_S(k) \triangleq \{u_j(k)\}_{j \in S} \in U_S^k \triangleq \coprod_{j \in S} U_j^k \tag{2.2}$$

$$u_{M-S}(k) \triangleq \{u_j(k)\}_{j \in M-S} \in U_{M-S}^k. \tag{2.3}$$

For a coalition $S \neq M$ the class of admissible strategies is restricted to mappings

$$\mu_S^k : E^n \to U_S^k, \qquad k = 0, 1, \cdots, K-1; \tag{2.4}$$

thus S considers a vector valued cost function defined by

$$\psi_S[\cdot] \triangleq \{\psi_{j/S}[\cdot]\}_{j \in S} \tag{2.5}$$

with

$$\psi_{j/S}[i, x(i), \mu_S^i, \cdots, \mu_S^{K-1}] \triangleq \sup_{u_{M-S}(k) \in U_{M-S}^k,\ k=i,i+1,\cdots,K-1} \left\{ \sum_{k=i}^{K-1} \phi_j^k[x(k), \mu_S^k[x(k)], u_{M-S}(k)] + \Xi_j[x(K)] \right\} \tag{2.6}$$

where

$$\phi_j^k : E^n \times U_M^k \to (-\infty, \infty] \quad \text{and} \quad \Xi_j : E^n \to (-\infty, \infty]$$

are given functionals. Thus, by (2.6), the cost function used for the evaluation of the strategies of a coalition S depends on the initial stage i, the initial state $x(i)$ and the strategies used at each subsequent stage. Furthermore, when the player j is in the coalition S then he knows only the strategies of this coalition and, adopting a pessimistic approach, he considers the controls of the players in the complementary coalition $M - S$ as unpredictable, but constrained, perturbations.

When the coalition S is equal to M, one has *full cooperation* and for each player the following cost functional is defined:

$$J_j[i, x(i), u_M(i), \cdots, u_M(K-1)] \triangleq \sum_{k=i}^{K-1} \phi_j^k[x(k), u_M(k)] + \Xi_j[x(K)]. \tag{2.7}$$

Definition 2.1: The *Characteristic Function* (at stage i) of the game of coalitions given by (2.1)–(2.7) is the mapping v^i defined by:

$$v^i : (S, x(i)) \to v^i[S, x(i)] \subset R^S \triangleq \coprod_{j \in S} (-\infty, \infty) \tag{2.8}$$

with

$$\omega_S \triangleq \{\omega_j\}_{j \in S} \in v^i[S, x(i)] \Leftrightarrow \exists \mu_S^i, \cdots, \mu_S^{K-1}$$

such that

$$\forall_j \in S \psi_{j/S}[i, x(i), \mu_S^i, \cdots, \mu_S^{K-1}] < \omega_j. \qquad \blacksquare \tag{2.9}$$

Thus the characteristic function gives for each stage i, each state $x(i)$ and each coalition S the set of all cost vectors ω_S which dominate any admissible value of the cost function (2.5).

Definition 2.2: The Core at $x(i)$ of the game given by (2.1)–(2.9) is the set $\Omega^i[x(i)]$ of all vectors $\omega_M \in R^M$ such that:

1) There exists a Pareto optimal sequence of controls $u_M(i), \cdots, u_M(K-1)$ such that

$$\forall j \in M \quad J_j[i, x(i), u_M(i), \cdots, u_M(K-1)] = \omega_j. \tag{2.10}$$

2) $\forall S \subset M$ the projection ω_S of ω_M in R^S is *not interior* to $v^i[S, x(i)]$. ■

ript received October 17, 1973; revised March 15, 1974. Paper recommended by , Chairman of the IEEE S-CS Large Systems, Differential Games Committee. was supported by the Canada Council under Grant S73-0935 and the Ministère tion du Québec (DGES).

hor is with the Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Montréal, P.Q.,

Copyright ©1975 by The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.
Printed in U.S.A. Annals No. 504AC010

a cost vector ω_M is in the core $\Omega^i[x(i)]$ then it dominates no other ome, full cooperation is realized and furthermore, at this point $x(i)$, dmissible coalition can assure lower cost levels for all its members pendently of the actions of the complementary coalition. In other s, no coalition can raise an objection against the control sequence at point. Generally games of coalitions are defined directly in a acteristic function form [1]–[4]; thus the Core is a useful solution ept having some equilibrium properties. However, an important does not seem to have been noticed yet, when dealing with stage games. Even if a cost vector ω_M is in the Core $\Omega^i[x(i)]$, this not provide the assurance that at a later stage k, at a point $x(k)$ of rajectory generated by the Pareto optimal controls verifying (2.10), dmissible coalition will be able to obtain, by its own action, a imistic" cost vector strictly dominated by the cost vector generated e controls $u_M(k),\cdots,u_M(K-1)$. Hence a more restrictive definition timality is needed.

finition 2.3: A control sequence $\hat{u}_M(k), k=i,i+1,\cdots,K-1$ is C-nal at $\hat{x}(i)$ if it generates a trajectory $\hat{x}(k), k=i,i+1,\cdots,K$, solution 1) and a sequence of costs

$$J_j[k,\hat{x}(k),\hat{u}_M(k),\cdots,\hat{u}_M(K-1)]$$

$$j\in M,\quad k=i,i+1,\cdots,K-1 \qquad (2.11)$$

that

$$\omega_M^k \triangleq \{\omega_j^k\}_{j\in M}\in\Omega^k[\hat{x}(k)],\qquad k=i,i+1,\cdots,K-1. \ \blacksquare \qquad (2.12)$$

ourse, a C-optimal control sequence is also Pareto optimal; rmore, since the cost vector ω_M^k is contained at each state $\hat{x}(k)$ in ore $\Omega^k[\hat{x}(k)]$ there is a collective rationality in using the control nce

$$\hat{u}_M(i),\hat{u}_M(i+1),\cdots,\hat{u}_M(K-1).$$

III. Computation of the Characteristic Function of a Linear Game

his section a linear multistage system is considered:

$$x(k+1)=A^k x(k)+\sum_{j\in M}B_j^k u_j(k) \qquad (3.1)$$

he following particular cost functionals:

$$\psi_{j/S}[i,x(i),\mu_S^i,\cdots,\mu_S^{K-1}]$$

$$\triangleq \sup_{u_{M-S}(k)\in U_{M-S}^k,\ k=i,i+1,\cdots,K-1}\left\{\sum_{k=i}^{K-1}\left(\varphi_j^k[x(k)]+\gamma_j^k[\mu_{j/S}^k(x(k))]\right)+\varphi_j^K[x(K)]\right\} \qquad (3.2)$$

A^k, B_j^k are given matrices and the functionals

$$:R^n\to(-\infty,\infty],\qquad k=0,1,\cdots,K,\quad \gamma_j^k: U_j^k\to(-\infty,\infty],$$

$$k=0,1,\cdots,K-1$$

ven functionals. $\mu_{j/S}^k[x(k)]\in U_j^k$ is the projection on U_j^k of the $\mu_S^k[x(k)]$. This game is an adaptation to a m-player game setting uncertain system extensively studied by Bertesekas in [8]. Now it is le to give a constructive method for the determination of the teristic function of the game. The following notations will be

$$\{\omega_j\}_{j\in S},\ \varphi_S^k(\cdot)\triangleq\{\varphi_j^k(\cdot)\}_{j\in S}\qquad \omega_S<\omega_S'\Leftrightarrow\omega_j<\omega_j'\qquad \forall j\in S$$

$$B_S^k u_S(k)\triangleq\sum_{j\in S}B_j^k u_j(k).$$

rem 3.1: The characteristic function of the linear convex game by (3.1) and (3.2) can be constructed by the following algorithm:

1) $$\forall x(K),\ v^K[S,x(K)]\triangleq\{\omega_S\in R^S:\varphi_S^K[x(K)]<\omega_S\}. \qquad (3.3)$$

2) $$\mathfrak{G}^{k+1}[S,x]\triangleq\cap v^{k+1}[S,x+B_{M-S}^k u_{M-S}(k)]$$

$$u_{M-S}(k)\in U_{M-S}^k. \qquad (3.4)$$

3) $$\mathfrak{K}^k[S,x(k)]\triangleq\cup\{\gamma_S^k[u_S(k)]\}+\mathfrak{G}^{k+1}[S,A^k x(k)+B_S^k u_S(k)]$$

$$u_S(k)\in U_S^k. \qquad (3.5)$$

4) $$v^k[S,x(k)]=\{\varphi_S^k[x(k)]\}+\mathfrak{K}^k[S,x(k)]. \qquad (3.6)$$

Proof: First the following proposition will be established.

$$\omega_S\in v^k[S,x(k)]\Leftrightarrow\exists\bar{u}_S(k)\in U_S^k\ \text{s.t.}\ \forall u_{M-S}(k)$$

$$\in U_{M-S}^k,\ \omega_S-\varphi_S^k[x(k)]-\gamma_S^k[u_S(k)]$$

$$\in v^{k+1}[S,A^k x(k)+B_S^k\bar{u}_S(k)+B_{M-S}^k u_{M-S}(k)]. \qquad (3.7)$$

Necessary condition: Consider $\omega_S\in v^k[S,x(k)]$; thus there exist $\mu_S^k,\cdots,\mu_S^{K-1}$ such that

$$\psi_S[k,x(k),\mu_S^k,\cdots,\mu_S^{K-1}]<\omega_S. \qquad (3.8)$$

Defining $\bar{u}_S(k)\triangleq\mu_S^k[x(k)]$, the right-hand side (RHS) of (3.7) is trivially verified.

Sufficient condition: Consider $\bar{u}_S(k)$ such that the RHS of (3.7) is verified, then for any $u_{M-S}(k)$ there exists a sequence of strategies $\mu_S^{k+1},\cdots,\mu_S^{K-1}$ such that

$$\psi_S[k+1,\bar{x}(k+1),\mu_S^{k+1},\cdots,\mu_S^{K-1}]<\omega_S' \qquad (3.9)$$

with

$$\omega_S'\triangleq\omega_S-\varphi_S^k[x(k)]-\gamma_S^k[\bar{u}_S(k)]. \qquad (3.10)$$

$$\bar{x}(k+1)\triangleq A^k x(k)+B_S^k\bar{u}_S(k)+B_{M-S}^k u_{M-S}(k). \qquad (3.11)$$

Thus, defining $\mu_S^k[x(k)]\triangleq\bar{u}_S(k)$ one has

$$\forall j\in S\quad \psi_{j/S}[k,x(k),\mu_S^k,\cdots,\mu_S^{K-1}]=\varphi_j^k[x(k)]+\gamma_S^k[\bar{u}_S(k)]$$

$$+\sup_{u_{M-S}(k)\in U_{M-S}^k}\psi_{j/S}[k+1,\bar{x}(k+1),\mu_S^{k+1},\cdots,\mu_S^{K-1}] \qquad (3.12)$$

and then by (3.9)–(3.12)

$$\psi_S[k,x(k),\mu_S^k,\cdots,\mu_S^{K-1}]<\omega_S \qquad (3.13)$$

that is, by Definition 2.1 $\omega_S\in v^k[S,x(k)]$. This establishes the proposition (3.7). Now it remains to show that the three last steps of the algorithm are equivalent to the RHS of (3.7). By (3.6), one has

$$\omega_S\in v^k[S,x(k)]\Leftrightarrow\omega_S-\varphi_S^k[x(k)]\in\mathfrak{K}^k[S,x(k)] \qquad (3.14)$$

and by (3.5) and (3.14)

$$\omega_S\in v^k[S,x(k)]\Leftrightarrow\exists u_S(k)\in U_S^k\ \text{s.t.}\ \omega_S-\varphi_S^k[x(k)]-\gamma_S^k[u_S(k)]$$

$$\in\mathfrak{G}^{k+1}[S,A^k x(k)+B_S^k u_S(k)] \qquad (3.15)$$

and finally by (3.4) and (3.15)

$$\omega_S\in v^k[S,x(k)]\Leftrightarrow\exists u_S(k)\in U_S^k\ \text{s.t.}\ \forall u_{M-S}(k)\in U_{M-S}^k,$$

$\omega_S-\varphi_S^k[x(k)]-\gamma_S^k[u_S(k)]\in v^{k+1}[S,A^k x(k)+B_S^k u_S(k)+B_{M-S}^k u_{M-S}(k)]$ that is the RHS of (3.7). ■

IV. Example

Consider the system

$$x(k+1)=x(k)+\sum_{j\in\{1,2,3\}}u_j(k) \qquad (4.1)$$

$$x \triangleq (x_1, x_2) \in E^2, \quad k = 0, 1, \qquad M \triangleq \{1, 2, 3\}$$

$$: \triangleq \left\{ u_j(k) \in E^2 : \|u_j(k)\| < \alpha_j^k \right\} \alpha_j^k > 0 \text{ given}, \; k = 0, 1 \, j \in M \quad (4.2)$$

cost functionals defined at terminal state only:

$$\phi_j : x(2) \to \langle z_j, x(2) \rangle, \qquad z_j \text{ given in } E^2, j \in M, \; \|z_j\| = 1. \quad (4.3)$$

n 3.1 can be used to compute the characteristic function of the efined by (4.1)–(4.3).

ion: If α is a real number, $\alpha^{(2)}$ will be the square of α.

layer coalitions: $\forall j, \mu, \nu$ s.t. $\quad M = \{j, \mu, \nu\}$:

$$\mathcal{E}^2[\{j\}, x] = \left\{ \omega_j \in R : \omega_j > \langle z_j, x \rangle + \alpha_\mu^1 + \alpha_\nu^1 \right\}, \; v^1[\{j\}, x]$$

$$= \left\{ \omega_j \in R : \omega_j > \langle z_j, x \rangle + \alpha_\mu^1 + \alpha_\nu^1 - \alpha_j^1 \right\}.$$

layer coalitions: Define $\lambda_{j\mu} \triangleq \langle z_j, z_\mu \rangle$, then

$$\mathcal{E}^2[\{j, \mu\}, x] = \left\{ \omega_{j,\mu} \in R^2 : \omega_l > \langle z_l, x \rangle + \alpha_\nu^1, \quad l = j, \mu \right\}$$

$$v^1[\{j, \mu\}, x] = \left\{ \omega_{(j,\mu)} \in R^2 : \omega_{(j,\omega)} > \bar{\omega}_{(j,\omega)} \right.$$

$$\bar{\omega}_l = \tilde{\omega}_l + \langle z_l, x \rangle + \alpha_\nu^1, \qquad l = j, \mu$$

$$\left. \tilde{\omega}_j^{(2)} + \tilde{\omega}_\mu^{(2)} - 2\lambda_{j\mu} \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_\mu < \left(\alpha_j^1 + \alpha_\mu^1\right)^{(2)} \left(1 - \lambda_{j\mu}^{(2)}\right) \right\}. \quad (4.4)$$

ayer coalitions:

$$[\{j\}, x] = \left\{ \omega_j \in R : \omega_j > \langle z_j, x \rangle + \sum_{k=0}^{1} \left(\alpha_\mu^k + \alpha_\nu^k\right) - \alpha_j^1 \right\}$$

$$[\{j\}, x] = \left\{ \omega_j \in R : \omega_j > \langle z_j, x \rangle + \sum_{k=0}^{1} \left(\alpha_\mu^k + \alpha_\nu^k - \alpha_j^k\right) \right\}.$$

ayer coalitions:

$$\mathcal{E}^1[\{j, \mu\}, x] = \left\{ \omega_{(j,\mu)} \in R^2 : \omega_{(j,\mu)} > \bar{\omega}_{(j,\mu)} \right.$$

$$\bar{\omega}_l = \tilde{\omega}_l + \langle z_l, x \rangle + \alpha_\nu^1 + \alpha_\nu^0, \qquad l = j, \mu$$

$$\left. \tilde{\omega}_j^{(2)} + \tilde{\omega}_\mu^{(2)} - 2\lambda_{j\mu} \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_\mu < \left(\alpha_j^1 + \alpha_\mu^1\right)^{(2)} \left(1 - \lambda_{j\mu}^{(2)}\right) \right\}.$$

$$v^0[\{j, \mu\}, x] = \left\{ \omega_{(j,\mu)} \in R^2 : \omega_{(j,\mu)} > \bar{\omega}_{(j,\mu)} \right.$$

$$\bar{\omega}_l = \tilde{\omega}_l + \langle z_l, x \rangle + \alpha_\nu^1 + \alpha_\nu^0, \qquad l = j, \mu$$

$$\left. \tilde{\omega}_j^{(2)} + \tilde{\omega}_\mu^{(2)} - 2\lambda_{j\mu} \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_\mu < \left(\sum_{k=0}^{1} \left(\alpha_j^k + \alpha_\mu^k\right) \right)^{(2)} \left(1 - \lambda_{j\mu}^{(2)}\right) \right\}. \quad (4.5)$$

articular game it is possible to verify that a control sequence cost vector in the Core at $x(0)$ may not be a C-optimal control Consider the game defined by (4.1)–(4.3) with

$$\alpha_1^k = \alpha_2^k = 1, \quad k = 0, 1, \quad \alpha_3^0 = 2, \quad \alpha_3^1 = \delta$$

$$z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad z_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad z_3 = (1, 0).$$

The control sequence $u_j(k) = (-1, 0)$, $k = 0, 1$, $j = 1, 2$, $u_3(0) = (-2, 0)$, $u_3(1) = (-\delta, 0)$ is Pareto optimal at $x(0) = 0$. This is clear since the cost functional of the third player is minimal for this control sequence and this minimum is unique.

The Pareto optimal trajectory is

$$x_1(1) = 4, \quad x_2(1) = 0, \quad x_1(2) = 6 + \delta, \quad x_2(2) = 0$$

and the costs are given by

$$\phi_1(x(2)) = -\frac{\sqrt{3}}{2}(6 + \delta), \; \phi_2(x(2)) = \frac{-1}{2}(6 + \delta), \; \phi_3(x(2)) = -(6 + \delta). \quad (4.6)$$

For the coalition $\{1, 2\}$ the characteristic function defined in (4.4) gives

$$v^0[\{1, 2\}, 0] = \left\{ \omega_{(1,2)} \in R^2 : \omega_{(1,2)} > \bar{\omega}_{(1,2)} \text{ s.t. } \bar{\omega}_l = \tilde{\omega}_l + 2 + \delta \right.$$

and

$$\left. \tilde{\omega}_1^{(2)} + \tilde{\omega}_2^{(2)} - \sqrt{3}\, \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 < 4 \right\}.$$

It is easily verified that the following inequalities hold:

$$\tilde{\omega}_1 > -4, \quad \tilde{\omega}_2 > -4$$

which give

$$\bar{\omega}_1 > -2 + \delta, \quad \bar{\omega}_2 > -2 + \delta$$

and thus

$$\phi_1(x(2)) < \bar{\omega}_1, \quad \phi_2(x(2)) < \bar{\omega}_2$$

for all admissible $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$.

Therefore $(\phi_1(x(2)), \phi_2(x(2)))$ is not in $\text{int}(v^0[\{1, 2\}, 0])$, and since $\phi_3(x(2))$ is the absolute minimum of ϕ_3 the cost vector (4.6) is contained in the Core at $x(0) = 0$.

At $x(1)$ one has

$$v^1[\{1, 2\}, x(1)] = \left\{ \omega_{(1,2)} \in R^2 : \omega_{(1,2)} > \bar{\omega}_{(1,2)} \text{ s.t. } \bar{\omega}_1 \right.$$

$$= \tilde{\omega}_1 + \delta - 2\sqrt{3} \; , \bar{\omega}_2 = \tilde{\omega}_2 + \delta - 2$$

and

$$\left. \tilde{\omega}_1^{(2)} + \tilde{\omega}_2^{(2)} - \sqrt{3}\, \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 < 1 \right\}.$$

Consider

$$\tilde{\omega}_1 = -2, \tilde{\omega}_2 = -\sqrt{3}$$

which is admissible. Then

$$\bar{\omega}_1 = -2(1 + \sqrt{3}) + \delta < -3\sqrt{3} - \delta\frac{\sqrt{3}}{2} = \phi_1(x(2))$$

for δ small enough.

$$\bar{\omega}_2 = -\sqrt{3} - 2 + \delta < -3 - \frac{\delta}{2} = \phi_2(x(2))$$

for δ small enough.

Thus for δ small enough the cost vector $(\phi_1(x(2)), \phi_2(x(2)))$ is contained in the interior of $v^1[\{1, 2\}, x(1)]$, thus the cost vector (4.6) is not contained in the Core at $x(1)$ and the control sequence considered is not C-optimal at $x(0) = 0$.

Of course this is due to the fact that Player 3 has a vanishing retaliation power at Stage 1 when δ tends to zero.

V. Conclusion

The characteristic function and the Core of a multistage game of coalitions have been defined and an algorithm has been proposed for the computation of the characteristic function of a linear convex game. On an example it has been shown that the Core is not a satisfactory optimality concept since a trajectory defining a cost vector contained in the Core at the initial state may pass through intermediate states where the cost vector is no longer contained in the Core. The concept of C-optimality has been proposed. An open problem is the characterization of C-optimal control sequences; a first attempt in this direction may be found in [11]–[12].

References

[1] H. Scarf, "The core of a n-person game," *Econometrica*, no. 35, pp. 50–69, 1967.
[2] R. Aumann, *A Survey of Cooperative Games without Side Payments in Essays in Mathematical Economics*, M. Shubik, Ed. Princeton, N.J.: 1969.
[3] W. F. Lucas, "Some recent developments in n-person game theory," *SIAM Rev.*, vol. 13, pp. 491–523, 1971.
[4] H. Scarf, "On the existence of a cooperative solution for a general class of n-person games," *J. Economic Theory*, no. 3, pp. 169–181, 1971.
[5] A. Haurie, "On Pareto optimal decisions for a coalition of a subset of players," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-18, pp. 144–149, Apr. 1973.
[6] J. L. Goffin and A. Haurie, "Necessary condition and sufficient conditions for Pareto optimality in a multicriterion perturbed system," in *Proc. 5th Int. Fed. Information Processing Conf. Optimization Techniques*. Rome, Italy: Springer-Verlag, 1973.
[7] H. S. Witsenhausen, "Minimax control of uncertain systems," Mass. Inst. Technol., Cambridge, Rep. ESL-R-269, May 1966.
[8] D. P. Bertsekas, "Control of uncertain systems with a set-membership description of the uncertainty," Mass. Inst. Technol., Cambridge, Rep. ESL-R-447, June 1971.
[9] D. P. Bertsekas and I. B. Rhodes, "On the minimax reachability of target sets and target tubes," *Automatica*, vol. 7, pp. 233–247, 1971.
[10] ——, "On the minimax feedback control of uncertain systems," presented at the IEEE Conf. on Decision and Control, Paper F3-3, 1971.
[11] A. Haurie and M. Delfour, "Individual and collective rationality in a dynamic Pareto equilibrium," *J. Optimiz. Theory Appl.*, vol. 13, pp. 290–302, Mar. 1974.
[12] A. Haurie, "The characteristic function and the core of a multistage game of coalition," in *Proc. Eleventh Annu. Allerton Conf. Circuit and System Theory*, Urbana, Ill., Oct. 1973.

CHAPITRE 3: PARETO-OPTIMALITE POUR DES SYSTEMES PERTURBES

Plan: 3.1 Solutions "Sup-Paréto-Optimales".

3.2 Processus de scalarisation.

3.3 Une règle des multiplicateurs de Lagrange.

3.4 Application au calcul de la fonction caractéristique d'un jeu sans paiements latéraux.

3.5 Conclusion.

Introduction

Dans ce chapitre nous considérons un système multi-critère et perturbé. Une notion de Paréto-optimalité est présentée et des conditions nécessaires ou suffisantes d'optimalité sont établies. Cette notion de Paréto-optimalitité pour des systèmes perturbés, notée aussi "Sup-Paréto-Optimalité" est directement liée à la notion de fonction caractéristique d'un jeu sous forme normale telle que proposé par Aumann (1969). Les théorèmes de caractérisation que nous établissons dans les sections suivantes peuvent donc servir à "calculer" cette fonction caractéristique dans le cas où il n'y a pas de paiements latéraux.

3.1. Solutions "Sup-Paréto-Optimales".

Nous considérons un système décrit par:

un ensemble de décisions X

un ensemble de perturbations Y

un critère à valeur vectorielle:

$$\psi : X \times Y \to R^p$$

$$(x,y) \to \psi(x,y) \triangleq (\psi_j(x,y))_{j=1,\ldots,p}$$

où p est un entier positif donné.

Des *systèmes perturbés à critères scalaires* ont été étudiés par Witsenhausen (1966), Delfour et Mitter (1969), Glover et Schweppe (1971), Bertsekas et Rhodes (1971). Dans cette étude nous considérons le cas où un preneur de décision, choisissant un élément dans l'ensemble X, évalue ses performances à l'aide d'un critère vectoriel, en présence de perturbations *imprévisibles* mais contraintes par l'ensemble Y.

Dans le cas de systèmes perturbés à critère scalaire, les auteurs cités plus haut ont utilisé la notion de *Min-Sup* ou *Min-Max* pour définir l'optimalité. Il s'agit alors d'un comportement pessimiste où le décideur cherche à minimiser le maximum du coût.

Dans le cas de systèmes multicritères, la notion de *Paréto-optimalité* définit adéquatement l'optimalité. Une décision est *Paréto-optimale* s'il n'existe pas d'autre décision permettant de réduire la valeur d'une composante du critère sans augmenter simultanément la valeur d'une autre composante du critère.

Ainsi, dans un système multicritère perturbé nous proposons la notion suivante d'optimalité comme une extension naturelle des notions de *Min-Sup* et de *Paréto-optimalité*.

Définition 3.1: Une décision x* de X est *Sup-Paréto-Optimale* si pour toute décision x de X on a:

$$\forall\, j \in \{1,\ldots,p\} \quad \mathrm{Sup}\{\psi_j(x,y) : y \in Y\} = \mathrm{Sup}\{\psi_j(x^*,y) : y \in Y\}$$

ou bien

$$\exists\, j \in \{1,\ldots,p\} \quad \mathrm{Sup}\{\psi_j(x,y) : y \in Y\} > \mathrm{Sup}\{\psi_j(x^*,y) : y \in Y\}. \quad \blacksquare$$

Pour interpréter cette notion d'optimalité considérons le *critère vectoriel transformé*:

$$\phi : X \to R^p$$

$$x \to \phi(x) \triangleq (\mathrm{Sup}\{\psi_j(x,y) : y \in Y\})_{j=1,\ldots,p}.$$

On s'aperçoit alors que x^* est *Sup-Paréto-Optimal* si et seulement si on a:

$$\forall\, x \in X \quad \phi(x) \leq \phi(x^*) \Rightarrow \phi(x) = \phi(x^*)$$

c'est-à-dire si et seulement si x^* est Paréto-optimal relativement au critère transformé.

3.2. Processus de scalarisation

Nous utiliserons dorénavant l'abréviation S.P.O. pour désigner l'expression *Sup-Paréto-Optimal(e)*. Des résultats bien connus sur la Paréto-optimalité nous pouvons déduire la condition suffisante suivante:

Théorème 3.1: Soit x^* dans X. Définissons:

$$Y^p \triangleq \prod_{i=1,\ldots,p} Y$$

$$y^p \triangleq (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in Y^p.$$

S'il existe des *scalaires positifs* α_j, $j = 1,\ldots,p$, tels que

$$\forall\, x \in X \quad \mathrm{Sup}\left\{ \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \psi_j(x^*,y_j) \;:\; y^p \in Y^p \right\}$$

$$\leq \mathrm{Sup}\left\{ \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \psi_j(x,y_j) \;:\; y^p \in Y^p \right\} \qquad (3.1)$$

alors x* est S.P.O.

Démonstration: On a:

$$\mathrm{Sup}\left\{ \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \psi_j(x,y_j) \;:\; y^p \in Y^p \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \;\; \mathrm{Sup}\{\psi_j(x,y_j) \;:\; y_j \in Y\}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \phi_j(x).$$

La relation 3.1 revient donc à dire que x* rend minimal le critère scalaire:

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \phi_j(\cdot) \;:\; X \to R.$$

Les coefficients α_j étant tous positifs, il est bien connu (cf. Da Cunah et Pollak (1967)) que x* est Paréto-optimal relativement au critère transformé ϕ et donc est aussi S.P.O. ■

Ce premier résultat est dans la ligne de ceux obtenus pour des systèmes non pertubés et que l'on peut ranger sous le nom générique

de *processus de scalarisation*. C'est-à-dire que pour trouver une décision S.P.O. on peut chercher à résoudre un problème *Min Sup* défini à partir de la scalarisation du critère sous forme d'une somme pondérée de ses composantes, dont aucun coefficient de pondération n'est négatif ou nul.

Nous chercherons maintenant à établir des conditions nécessaires de même nature. Nous devrons pour cela faire quelques hypothèses.

Hypothèses 3.1: X est un sous ensemble convexe d'un espace vectoriel sur R et ψ vérifie la relation suivante:

$$\forall\, x,x' \in X, \quad \forall\, \lambda \in [0,1], \quad \exists\, z \in X \quad \text{t.q.}$$

$$\forall\, y \in Y \quad \psi(z,y) \leq \lambda\psi(x,y) + (1-\lambda)\psi(x',y). \quad \blacksquare \qquad (3.2)$$

Une conséquence immédiate de cette hypothèse est la suivante:

Lemme 3.1: Si l'hypothèse 3.1 est vraie, l'ensemble*:

$$\phi(X) + R^p_+ \triangleq \{\omega \in R^p : \exists\, x \in X, \exists\, \gamma \in R^p_+, \omega = \phi(x) + \gamma\}$$

est convexe.

Démonstration: Selon (3.2) on aura:

$$\forall\, j \in \{1,\ldots,p\} \quad \text{Sup}\{\psi_j(z,y) : y \in Y\}$$

$$\leq \lambda\, \text{Sup}\{\psi_j(x,y) : y \in Y\} + (1-\lambda)\text{Sup}\{\psi_j(x',y) : y \in Y\}.$$

---

* Nous notons R^p_+ l'ensemble des vecteurs de R^p à composantes non négatives.

et donc aussi:

$$\forall\ x,x' \in X,\quad \forall\ \lambda \in [0,1],\quad \exists\ z \in X \quad \text{t.q.}$$

$$\phi(z) \leq \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(x')$$

ce qui peut être écrit:

$$\forall\ x,x' \in X,\quad \forall\ \lambda \in [0,1],\quad \exists\ z \in X,\quad \exists\ \gamma \in R_+^p \quad \text{t.q.}$$

$$\phi(z) + \gamma = \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(x')$$

ce qui établit que $\phi(X) + R_+^p$ est convexe. ■

Nous pouvons établir une condition nécessaire d'optimalité.

Théorème 3.2: Sous l'hypothèse 3.1, si x* est S.P.O., alors il existe $\alpha = (\alpha_j)_{j=1,\ldots,p}$ dans R_+^p, non nul, tel que l'on ait:

$$\forall\ x \in X \quad \text{Sup} \left\{ \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \psi_j(x^*,y_j) \ :\ y^p \in Y^p \right\}$$

$$\leq \text{Sup} \left\{ \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \psi_j(x,y_j) \ :\ y^p \in Y^p \right\} \qquad (3.2)$$

Démonstration: Si x* est S.P.O., alors x* est Paréto-Optimal relativement au critère transformé ϕ. Alors les deux ensembles:

$$\phi(X) + R_+^p$$

$$\{\phi(x^*)\} - R_+^p$$

ne peuvent avoir que $\phi(x^*)$ comme élément commun; (3.2) est alors une

conséquence de la convexité de ces deux ensembles et du théorème de séparation. ■

Ces conditions nécessaires ou suffisantes peuvent être complétées par des conditions locales sous des hypothèses un peu plus restrictives.

Hypothèses 3.2: X est un sous ensemble *convexe* d'un *espace de Banach* U, Y est un *espace compact*; pour tout y dans Y

$$\psi(\cdot,y) : X \to R^p$$

est *convexe*, *dérivable* et la famille $\{\psi'_{jx}(\cdot,y) : y \in Y, j = 1,\ldots,p\}$ est équicontinue; ψ est continue sur $X \times Y$. ■

Nous avons noté ci-dessus $\psi'_{jx}(\cdot,y)$ la dérivée de **Gateaux** de $\psi_j(\cdot,y)$.

Théorème 3.3: Sous l'hypothèse 3.2 on a:

(i) Si x^* est S.P.O. alors il existe p scalaires α_j, $j = 1,\ldots,p$, *non négatifs et non tous nuls* tels que:

$$\operatorname*{Min}_{x\in X} \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \max_{y\in Y_j(x)} \langle \psi'_{jx}(x^*,y), x-x^* \rangle = 0 \qquad (3.3)$$

où:

$$Y_j(x) \triangleq \{\bar{y} \in Y : \psi_j(x,\bar{y}) = \max_{y\in Y} \psi_j(x,y)\} \quad j = 1,\ldots,p.$$

(ii) S'il existe x^* dans X et des coefficient α_j *tous positifs* tels que (3.3) soit vérifiée alors x^* est S.P.O.

Démonstration: Puisque $\psi_j(\cdot,y)$ est convexe ϕ_j l'est aussi. Toute fonctionnelle convexe définie sur un espace linéaire normé est directionnellement différentiable. Notons:

$$\phi_j'(x;h)$$

la différentielle de ϕ_j en $x \in X$, dans la direction $h \in U$.

Soit:

$$\alpha \triangleq (\alpha_j)_{j=1,\ldots,p} \in R_+^p$$

notons:

$$\phi^\alpha(\cdot) \triangleq \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \phi_j(\cdot).$$

ϕ^α est convexe, directionnellement différentiable avec:

$$\phi'^\alpha(x;h) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \phi_j'(x;h). \tag{3.4}$$

Dem'Yanov et Rubinov (1968) ont montré qu'une fonctionnelle convexe f, définie sur U, atteint un minimum sur le sous ensemble convexe X au point x* si et seulement si:

$$\min_{x \in X} f'(x^*;x-x^*) = 0. \tag{3.5}$$

Puisque l'hypothèse 3.2 implique l'hypothèse 3.1, en utilisant les théorèmes 3.1 et 3.2 ainsi que (3.4) et (3.5) on a:

Si x* est S.P.O. alors il existe α non nul dans R_+^p tel que ϕ^α soit maximale en x* et donc:

$$\min_{x\in X} \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \phi_j'(x^*;x-x^*) = 0. \qquad (3.6)$$

S'il existe α dans R_+^p, avec aucune composante nulle tel que ϕ^α soit maximale en x^* alors x^* est S.P.O. et donc (3.6) est une condition suffisante d'optimalité.

Pour compléter la démonstration il ne reste plus qu'à exprimer les différentielles $\phi_j'(x;h)$ en fonction des $\psi_{jx}'(x,y)$. Or sous les hypothèses indiquées* il a été établi par Lemaire (1970) que l'on a:

$$\phi_j'(x;h) = \max_{y\in Y_j(x)} \langle \psi_{jx}'(x,y), h \rangle . \qquad (3.7)$$

De (3.6) et (3.7) on déduit (3.3). ■

Corollaire 3.1: Si, pour x^* dans X, il existe α dans R_+^p avec aucune composante nulle et $\bar{y}_j$ dans $Y_j(x^*)$ pour tout j tels que:

$$\min_{x\in X} \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \langle \psi_{jx}'(x^*,\bar{y}_j), x-x^* \rangle = 0 \qquad (3.8)$$

alors x^* est S.P.O.

Démonstration: (3.8) implique (3.3). ■

Un résultat analogue au corollaire 3.1 peut être établi directement pour une classe particulière de systèmes, en s'appuyant sur la théorie de l'accessibilité des systèmes perturbés de Delfour et Mitter (1969), (cf. Haurie (1973 a) et b)).

* En fait Lemaire a établi ce résultat sous des conditions plus générales que celles indiquées ici, ne requérant pas en particulier la convexité de $\psi(\cdot,y)$.

3.3. Une règle des multiplicateurs de Lagrange

Nous nous intéresserons au cas particulier où l'ensemble de décision X est une partie d'un espace euclidien E^n, définie par un ensemble de contraintes d'inégalité. Nous ferons plus précisément l'hypothèse suivante:

Hypothèse 3.3: X est une partie de E^n, n entier, fixé, définie par:

$$X \triangleq \{x \in E^n : g_j(x) \geq 0, i = 1,\ldots,m\}$$

où m est un entier fixé et pour tout i

$$g_i : E^n \to R$$

est une fonctionnelle de classe C^1.

Y est un espace compact, ψ est continue sur $E^n \times Y$ et pour tout j $\psi'_{jx}(\cdot,\cdot)$ est continu sur $E^n \times Y$. ■

Théorème 3.4: Sous l'hypothèse 3.3 si x* dans X est S.P.O. et si les conditions de qualification des contraintes de Kuhn et Tucker sont vérifiées en x*, alors il existe m *réels non négatifs* λ_i, i = 1,...,m et p *réels non négatifs et non tous nuls* α_j, j = 1,...,p tels que l'on ait:

$$\forall\ h \in E^n$$

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \max_{y_j \in Y_j(x^*)} \langle \psi'_{jx}(x^*,y), h \rangle \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle g'_i(x^*), h \rangle \qquad (3.9)$$

et

$$\lambda_k g_k(x^*) = 0, \quad k = 1,\ldots,m. \qquad (3.10)$$

De plus, si les fonctionnelles g_i sont *concaves* et les fonctionnelles ψ_j sont *convexes* en x, si (3.9) est vérifiée avec des coefficients α_j tous positifs, alors x* est S.P.O.

Démonstration: Danskin (1967) et Dem'Yanov (1968) ont établi que, sous l'hypothèse 3.3, pour tout j, la fonctionnelle ϕ_j est directionnellement différentiable avec:

$$\phi_j'(x;h) = \max_{y \in Y_j(x)} \langle \psi_{jx}'(x,y), h \rangle \tag{3.11}$$

où $Y_j(x)$ a été défini dans le Théorème 3.3.

Si x* est S.P.O., x* est aussi Paréto-optimal relativement au critère transformé ϕ. On a donc nécessairement:

$$\forall\, x \in X \qquad \max_{j=1,\ldots,p} \{\phi_j(x) - \phi_j(x^*)\} \geq 0 \tag{3.12}$$

Soit Γ l'ensemble des vecteurs h de E^n tels qu'il existe une fonction:

$$e : [0,1] \to E^n$$

vérifiant:

$e(0) = x^*$

$e(\tau) \in X$ pour $0 \leq \tau \leq 1$

e est différentiable en $\tau = 0$ et vérifie:

$$\frac{de(0)}{d\tau} = \lambda h \quad \text{pour} \quad \lambda > 0.$$

De la différentiabilité directionnelle des ϕ_j on déduit que l'on a:

$$\forall\, h \in \Gamma \qquad \max_{j} \phi'_j(x^*;h) \geq 0. \tag{3.13}$$

Cependant que les conditions de qualification des contraintes impliquent que l'on aura:

$$\hat{\Gamma} \triangleq \{h \in E^n : \langle g'_i(x^*),h \rangle \geq 0, i \in I\} \subset \Gamma \tag{3.14}$$

où

$$I \triangleq \{i \in \{1,\ldots,m\} : g_i(x^*) = 0\}.$$

De (3.11), (3.13) et (3.14) on déduit que:

$$\forall\, h \in \hat{\Gamma} \qquad \max_{j=1,\ldots,p} \max_{y \in Y_j(x^*)} \langle \psi'_{jx}(x^*,y),h \rangle \geq 0. \tag{3.15}$$

Soit W la fermeture convexe de l'ensemble des gradients:

$$W \triangleq \mathrm{Co}[\{\psi'_{jx}(x^*,y_j) : j = 1,\ldots,p; y_j \in Y_j(x^*)\}].$$

(3.15) impliquera donc aussi:

$$\forall\, h \in \hat{\Gamma} \qquad \max_{w \in W} \langle w,h \rangle \geq 0. \tag{3.16}$$

Considérons maintenant le cône $\hat{\Gamma}^*$, polaire de $\hat{\Gamma}$,

$$\hat{\Gamma}^* \triangleq \{z \in E^n : \langle z,h \rangle \geq 0, \quad \forall\, h \in \hat{\Gamma}\}.$$

La condition nécessaire d'optimalité dérivera du fait que l'on a une intersection non vide entre $\hat{\Gamma}^*$ et W. En effet, soit $\hat{w}$ dans $\hat{\Gamma}^* \cap W$, d'après le lemme de Farkas il existe des coefficients non négatifs λ_i, pour i dans I, tels que:

$$\hat{w} = \sum_{i \in I} \lambda_i g_i'(x^*) \tag{3.17}$$

et l'on peut toujours définir p coefficients α_j et p vecteurs w_j tels que:

$$\hat{w} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j w_j \tag{3.18}$$

$$\alpha_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots,p; \quad \sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1 \tag{3.19}$$

$$w_j \in \{\psi_{jx}'(x^*,y) \; : \; y \in Y_j(x^*)\}. \tag{3.20}$$

Dès lors si on pose:

$$\lambda_i = 0 \quad \text{si} \quad i \notin I. \tag{3.21}$$

On déduit de (3.17)-(3.21) que l'on a:

$$\forall\, h \in E^n \qquad \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \max_{y \in Y_j(x^*)} \langle \psi_{jx}'(x^*,y), h \rangle$$

$$\geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle g_i'(x^*), h \rangle .$$

C'est-à-dire l'expression (3.9). Quant à (3.10), cela correspond à (3.21). Ceci établit donc la condition nécessaire.

Pour ce qui concerne les conditions suffisantes, la démonstration consistera à montrer que, sous les hypothèses de convexité faites, une décision x* telle que (3.9) et (3.10) soient vérifiées avec des α_i tous positifs est telle que le critère scalarisé:

$$\phi^{\alpha}(\cdot) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \phi_j(\cdot) : X \to R$$

est minimal en x*, donc que x* est S.P.O.

En effet on aura pour tout j, du fait de la convexité des ϕ_j et de X:

$$\forall\, x \in X \qquad \phi_j(x) - \phi_j(x^*) \geq \phi_j'(x^*; x-x^*)$$

et donc:

$$\phi_j(x) - \phi_j(x^*) \geq \max_{y \in Y_j(x^*)} \langle \psi_{jx}'(x^*,y), x-x^* \rangle$$

en sommant avec la pondération α et d'après (3.9) on a:

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j (\phi_j(x)-\phi_j(x^*)) \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle g_i'(x^*), x-x^* \rangle$$

et, du fait de la concavité des g_i et de (3.10):

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j (\phi_j(x)-\phi_j(x^*)) \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(x)-g_i(x^*))$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

$$\geq 0$$

ce qui établit la proposition.

Pour conclure la démonstration de ce théorème il ne reste donc plus qu'à vérifier que l'on a bien:

$$W \cap \hat{\Gamma}^* \neq \emptyset.$$

Nous suivrons pour cela le même schéma de démonstration que Bram (1966). Supposons que $\hat{\Gamma}^* \cap W$ est vide. Puisque Y est compact et $\psi^!_{jx}$ est continue, l'ensemble W est convexe et compact. $\hat{\Gamma}^*$ étant convexe et disjoint de W il existe un plan séparant $\hat{\Gamma}^*$ et W et donc un vecteur z dans E^n et un scalaire c tels que:

$$\langle z,w \rangle < c \quad \text{si} \quad w \in \hat{\Gamma}^* \tag{3.22}$$

$$\langle z,w \rangle > c \quad \text{si} \quad w \in W. \tag{3.23}$$

Puisque le vecteur nul est un élément de $\hat{\Gamma}^*$ on a:

$$c > 0.$$

Puisque $\hat{\Gamma}^*$ est un cône, si pour un w de $\hat{\Gamma}^*$ on avait:

$$\langle z,w \rangle > 0$$

alors pour λ, scalaire positif assez grand on aurait $\langle z,\lambda w \rangle = \lambda \langle z,w \rangle > c$ et $\lambda w \in \hat{\Gamma}^*$ ce qui est impossible selon (3.22). On a donc:

$$\forall\, w \in \hat{\Gamma}^* \quad \langle z,w \rangle \leq 0. \tag{3.24}$$

Puisque, pour tout i dans I, on a:

$$g_i^!(x^*) \in \hat{\Gamma}^*.$$

(3.24) implique que -z est élément du cône $\hat{\Gamma}$ et nous aurons donc, d'après 3.16:

$$\operatorname*{Max}_{w \in W} \langle w,z \rangle \leq 0 \tag{3.25}$$

or (3.25) est en contradiction avec (3.23) où c est positif. Donc W et $\hat{\Gamma}^*$ sont séparés. ■

3.4. Application au calcul de la fonction caractéristique d'un jeu sans paiements latéraux.

Considérons un jeu sous forme normale défini par:

(i) un ensemble de joueurs $M \triangleq \{1,2,\ldots,m\}$,

(ii) pour tout joueur j de M un ensemble de stratégies U_j,

(iii) pour tout joueur j de M une fonctionnelle de coût:

$$V_j : \prod_{j\in M} U_j \to R.$$

Une coalition est une partie S de M. Nous utiliserons les notations:

$$U_S \triangleq \prod_{j\in S} U_j, \qquad R^S \triangleq \prod_{j\in S} R$$

$$V_S(\cdot) \triangleq \{V_j(\cdot)\}_{j\in S}, \qquad \omega_S \triangleq \{\omega\}_{j\in S}.$$

Nous rappellerons la définition de la fonction caractéristique du jeu. Si A est un ensemble, nous noterons $\mathcal{P}[A]$ l'ensemble des parties de A.

Définition 3.2: La fonction caractéristique d'un jeu sous forme normale est l'application:

$$v : \mathcal{P}[M] \to \mathcal{P}[R^M]$$

définie par:

$$\forall\, S \subset M, \quad \omega_M \triangleq (\omega_S,\omega_{M-S}) \in v(S) \iff$$

$$\exists\, u_S \in U_S \quad \forall\, u_{M-S} \in U_{M-S} \quad V_S(u_S,u_{M-S}) \leq \omega_S. \qquad \blacksquare \qquad (3.26)$$

Posons, par abus de notation:

$$\widehat{v(S)}^0 \triangleq \{\omega_M=(\omega_S,\omega_{M-S}) : \exists\, \bar{\omega}_M=(\bar{\omega}_S,\bar{\omega}_{M-S}) \in v(S) \quad \text{et} \quad \bar{\omega}_S < \omega_S\}.$$

Ainsi $\overbrace{v(S)}^{0}$ correspond à l'ensemble des vecteurs de l'espace des coûts R^M que la coalition S peut *bloquer*. C'est-à-dire que, si le jeu se déroule de façon coopérative et si on propose aux joueurs de la coalition S un vecteur de coût ω_M situé dans $\overbrace{v(S)}^{0}$, ces joueurs peuvent refuser cet accord puisqu'ils sont en mesure de s'assurer par leur propre action et quoique fassent les autres joueurs un coût dominé par ω_S.

Le résultat suivant établit un lien entre la notion de fonction caractéristique et celle de sup-Paréto-optimalité.

Théorème 3.5: Soit une coalition S de p joueurs. Définissons les ensembles suivants:

$$X \triangleq U_S, \quad Y = U_{M-S}$$

et le critère vectoriel:

$$\psi : X \times Y \to R^p, \quad \psi(x,y) = V_S(x,y) \triangleq V_S(u_S,u_{M-S})$$

alors, si $x^* \in X$ est une décision S.P.O., le vecteur de coût $\phi(x^*)$ est tel que:

$$\forall\ \omega_{M-S} \in R^{M-S}, \quad (\phi(x^*),\omega_{M-S}) \in \partial v(S)$$

où $\partial v(S)$ est la frontière de $v(S)$.

Démonstration: On a:

$$\phi(x^*) = (\mathrm{Sup}\{\psi_j(x,y) : y \in Y\})_{j\in S}.$$

Donc, par construction:

$$\exists\ u_S^* \in U_S \quad \forall\ u_{M-S} \in U_{M-S} \quad V_S(u_S^*,u_{M-S}) \leq \omega_S^* \triangleq \phi(x^*)$$

c'est-à-dire, d'après la définition 3.2:

$$\forall\ \omega_{M-S} \in R^{M-S} \quad \bar{\omega}_M = (\omega_S^*, \omega_{M-S}) \in v(S).$$

Supposons que pour un vecteur ω_{M-S} donné dans R^{M-S} $\bar{\omega}_M$ soit à l'intérieur de $v(S)$. Dans ce cas il existerait

$$\omega_S < \omega_S^* \quad \text{tel que} \quad \omega_M^\dagger = (\omega_S, \omega_{M-S}) \in v(S).$$

Donc il existerait $u_S^\dagger \in U_S$ tel que:

$$\forall\ u_{M-S} \in U_{M-S} \quad V_S(u_S^\dagger, u_{M-S}) \leq \omega_S < \omega_S^*$$

c'est-à-dire, en posant $x^\dagger \triangleq u_S^\dagger$:

$$\exists\ x^\dagger \in X \quad \phi(x^\dagger) < \phi(x^*)$$

ce qui contredit la sup-Paréto-optimalité de x^*. ■

Ce théorème peut être complété par le suivant:

Théorème 3.6: Si chaque U_j est un espace compact et chaque fonctionnelle V_j est continue sur U_M, pour tout j dans M alors un vecteur $\omega_M \triangleq (\omega_S, \omega_{M-S})$ est élément de $v(S)$ si et seulement si il existe une décision x^* S.P.O. telle que, avec les notations du théorème 3.5, on ait:

$$\omega_S \geq \phi(x^*).$$

Démonstration: La condition suffisante a été établie au théorème 3.5.

Pour établir la condition nécessaire il suffit de remarquer que, sous les hypothèses faites, $\phi(X)$ est compact et que $v(S)$ peut être redéfinie par:

$$\omega_M = (\omega_S, \omega_{M-S}) \in v(S) \iff \exists\, x \in X \quad \text{t.q.} \quad \omega_S \geq \phi(x).$$

En effet, si $\phi(X)$ est compact, pour tout x de X il existera x* S.P.O. tel que:

$$\phi(x^*) \leq \phi(x). \qquad \blacksquare$$

Nous voyons alors que pour calculer la fonction caractéristique d'un jeu défini sous forme normale il suffira souvent de calculer pour toute coalition S les points de la frontière $\partial v(S)$ correspondant à des décisions S.P.O. relativement au critère vectoriel $V_S(\cdot)$.

3.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons défini une notion d'optimalité pour des systèmes multi-critères perturbés en généralisant la notion de Paréto-optimalité et celle de critère "Min-Sup". Des conditions nécessaires et des conditions suffisantes ont été établies sous différentes hypothèses. Cette notion de *Sup-Paréto-Optimalité* a été reliée à celle de fonction caractéristique d'un jeu sous forme normale sous paiements latéraux. Des exemples d'application des conditions suffisantes d'optimalité établies dans ce chapitre ont été donnés par A. Haurie (1973 a) et b)).

ANNEXE 3.1

Reprinted by permission from IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL
Vol. AC-18, No. 2, April 1973, pp. 144-149
Copyright 1973, by the Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.
PRINTED IN THE U.S.A.

On Pareto Optimal Decisions for a Coalition of a Subset of Players

ALAIN HAURIE

***bstract*—The concept of Pareto optimality and the concept of –inf condition are used to give a new definition of optimality for a tion of players. A necessary condition and a sufficient condition proven for a class of topological games by using the approach e theory of reachability for perturbed systems.**

I. Introduction

THIS PAPER the problem of rational decision making in a coalition is discussed. The following are two eme cases which have deserved the most attention in literature: 1) the case where the coalition contains all ers and the optimality criterion is Pareto optimality ondominance [1]–[6]; and 2) the case where the coali- contains one player only and the optimality criterion max–inf condition [7]–[9].

hen the coalition contains more than one player and than all players, the optimality criterion should in- le features of the two preceding extreme cases. More isely, a decision $\hat{u}_S$ will be said to be optimal for a ition of players S if the worst gain for each player of S when the decision is $\hat{u}_S$ cannot be increased with an admissible decision u_S without decreasing the worst gain of another player of S.

The most interesting feature in m-player game theory is the possibility of coalitions among groups of players. There are many papers in game theory literature dealing with coalitions. They are mainly devoted to showing the existence of solutions that are stable against the formation of coalitions. In general, the game is defined in characteristic function form, i.e., in a framework from which the decisions available to the players are abstracted. Only the payoffs that each coalition can assure for itself are given [11], [12]. The greatest achievements of these theories have been in abstract economic theory [13], [14]. But, to obtain results of practical importance for decision making in applied engineering or management science, it seems necessary to go back to the decision structure of the game and then to characterize optimal decision rules (strategies) for coalitions.

The proper framework for the development of a "strategic theory" of games with coalition appears to be the theory of reachability of perturbed systems [7]–[10].

Such concepts have already been used to characterize collective rationality in a multistage game [15].

In Section II the coalitive Pareto optimality is precisely defined. In Section III a necessary condition and a

anuscript received June 15, 1972; revised November 6, 1972.
er recommended by I. B. Rhodes, Chairman of the IEEE S-CS e Systems, Differential Games Committee. This work was orted in part by the Canada Council under Grant S72-0513.
he author is with the Ecole des Hautes Etudes Commerciales, treal, P.Q., Canada.

t condition are proved for a particular class of Two examples illustrate the usefulness of these

otes the set of real numbers. If X is a vector space B are two subsets of X, one defines

$$A + B \triangleq \{x \in X : x = a + b, \quad a \in A, \quad b \in B\}.$$

scalar,

$$\alpha A \triangleq \{x \in X : x = \alpha a, \quad a \in A\}.$$

tor $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ in R^n is said to dominate or $w' = (w_1', w_2', \cdots, w_n')$ if $w_j \geq w_j', j = 1,2,\cdots,n$, $> w_l'$ for some l. We shall use the notation

$$w \geq w' \quad \text{for} \quad w_j \geq w_j', \quad j = 1,\cdots,n$$

$$w > w' \quad \text{for} \quad w_j > w_j', \quad j = 1,\cdots,n.$$

the dual of the vector space X. $\langle x,x^* \rangle$ is the x of the linear functional x^*. If A is a subset of a space X, ∂A denotes the boundary of A.

II. A General Definition of Coalitive Pareto Optimality

ition of the Game

ame considered is defined by

nite *set of players*, $M \triangleq \{1,2,\cdots,m\}$;
ollection of *decision sets* indexed on M; $\{U_j\}_{j \in M}$;
each player j, a *gain functional* $Q_j : \prod_{j \in M} U_j \to R$
t associates a gain for player j to a decision vector

$$\{u_j\}_{j \in M}; u_j \in U_j; \quad j = 1,2,\cdots,m.$$

ition

empty subset S of the set of players is a *coalition* if sts a binding agreement between the players in S oice of a collective decision. Using the notation

$$\prod_{j \in S} U_j \qquad R^S \triangleq \prod_{j \in S} R \qquad Q_S(\cdot) \triangleq \{Q_j(\cdot)\}_{j \in S},$$

n may be viewed as a unique player with a deci- U_S and a vector valued gain criterion $Q_S : \prod_{j \in M} U_j$

a coalition forms itself, it may consider the com- ary set of players $M - S$ as another coalition ecision is unpredictable. Thus a definition of the ty for the decision of a coalition will generalize ptimality [1]–[6] and max–inf conditions [7]–[9].

tion 1: The decision $\hat{u}_S$ in U_S is a coalitive Pareto (CPO) decision for the coalition S if for any u_S in U_S the proposition

$$\inf [Q_j(u_S,u_{M-S}) : u_{M-S} \in U_{M-S}]$$
$$= \inf [Q_j(\hat{u}_S,u_{M-S}) : u_{M-S} \in U_{M-S}] \triangleq \hat{w}_j, \qquad \forall j \in S$$

nly if the following is true:

$$\inf [Q_j(u_S,u_{M-S}) : u_{M-S} \in U_{M-S}]$$
$$= \inf [Q_j(\hat{u}_S,u_{M-S}) : u_{M-S} \in U_{M-S}] \triangleq \hat{w}_j, \qquad \forall j \in S.$$

The gain vector $\hat{w}_S \triangleq \{\hat{w}_j\}_{j \in S}$ will be called *the value for* S generated by the decision $\hat{u}_S$. ■

Remark 1: For the coalition of all players M with the decision set U_M, Definition 1 is the definition of Pareto optimality as defined usually. For a one-player coalition, Definition 1 is a max–inf condition.

Solving for the set of CPO decisions for a coalition S is equivalent to solving a "maximization problem with a vector gain criterion and set-constrained disturbances." u_S is the control vector; u_{M-S} is the perturbation vector, constrained to be an element of the set U_{M-S}; and Q_S: $U_S \times U_{M-S} \to R^S$ is the vector valued performance criterion. There are several well-known results for this problem when there is no disturbance (i.e., when $S = M$). They revolve around the process of scalarization [1]–[6]. The generalization of these results to coalitive Pareto optimality is not straightforward.

Given a coalition S, it is possible to define an auxiliary game by considering, when they are defined, the functionals

$$\varphi_j : u_S \to \varphi_j(u_S) \triangleq \inf [Q_j(u_S,u_{M-S}) : u_{M-S} \in U_{M-S}] \quad (2.1)$$

for each j in S and each u_S in U_S.

Define the vector valued function as $\varphi_S(\cdot) \triangleq \{\varphi_j(\cdot)\}_{j \in S}$; then a decision $\hat{u}_S$ is CPO iff

$$\varphi_S(u_S) \geq \varphi_S(\hat{u}_S) \Longrightarrow \varphi_S(u_S) = \varphi_S(\hat{u}_S), \qquad \forall u_S \in U_S.$$

This is the classical definition of Pareto optimality for the auxiliary game where S is the set of players and φ_j is the gain functional for each player j in S. Thus the scalarization process applies to this auxiliary game, giving the following obvious result.

Theorem 1: If there exists a strictly positive scalar α_j for each j in S such that $\hat{u}_S$ maximizes on U_S the scalarized auxiliary performance criterion

$$J_\alpha(\cdot) \triangleq \sum_{j \in S} \alpha_j \varphi_j(\cdot), \quad (2.2)$$

then $\hat{u}_S$ is a CPO decision. ■

This first result can be useful in searching for a class of CPO decisions but, in general, the maximization of the functional J_α is not a simple problem. This is due to the fact that the local behavior of the functionals φ_j is difficult to characterize. (For example, even if the functionals Q_j are differentiable, the φ_j are not necessarily differentiable.) In the next section two results are given for a particular class of topological game. The first one is a necessary condition which is used to define a set of candidates for coalitive Pareto optimality, the second one is a sufficient condition which seems to be more practical than Theorem 1.

Before considering these points, let us remark that a direct scalarization process performed on the functionals Q_j is not adequate since, for the scalarized performance criterion

$(u_S,u_{M-S}) \to G_\alpha(u_S,u_{M-S}) \triangleq \sum_{j\in S} \alpha_j Q_j(u_S,u_{M-S})$

$\alpha_j > 0$ for each j in S, a decision $\bar{u}_S$ such that for any u_S

$(\bar{u}_S,u_{M-S}):u_{M-S} \in U_{M-S}]$

$\geq \inf\ [G_\alpha(u_S,u_{M-S}):u_{M-S} \in U_{M-S}]$ (2.3)

ecessarily a CPO decision, since one has

$\sum_S \alpha_j \varphi_j(\bar{u}_S) \leq \inf\ [G_\alpha(\bar{u}_S,u_{M-S}):u_{M-S} \in U_{M-S}].$

ECESSARY CONDITION AND SUFFICIENT CONDITION T CPO IN AN S-SEPARABLE TOPOLOGICAL GAME

eparable Topological Game

S be a given coalition. The game is said to be an *rable topological game* if there exists a reflexive h space X on R and the following given mappings:

$$h_S:U_S \to X \qquad g_S:U_{M-S} \to X,$$

$$\psi_S:X \to R^S \qquad \psi_S(\cdot) \triangleq \{\psi_j(\cdot)\}_{j\in S}$$

nat

$) = \psi_S[h_S(u_S) + g_S(u_{M-S})],$

$\forall\ u_M \triangleq (u_S,u_{M-S}) \in U_M.$

umptions

following assumption will be used.

umption 1: Each component $\psi_j(\cdot)$ of the mapping concave upper semicontinuous functional on X. ■

finition and Properties of the Sets
$_S$) and $M(S,w_S)$

$\bar{w}_S$ be a given vector in R^S; then consider in X the ing sets, called, respectively, *the target set* and *the ed target set:*

$$X(S,\bar{w}_S) \triangleq \psi_S^{-1}[\{w_S \in R^S:w_S \geq \bar{w}_S\}]$$

$_S) \triangleq \{x \in X:x + g_S(u_{M-S}) \in X(S,\bar{w}_S),$

$\forall\ u_{M-S} \in U_{M-S}\}.$

sets have the following properties.

ma 1: There exists an element x of X such that

$[x + g_S(u_{M-S})]:u_{M-S} \in U_{M-S}\} \geq \bar{w}_j, \qquad \forall\ j \in S$

contained in $M(S,\bar{w}_S)$.

roof: By construction of the sets $X(S,\bar{w}_S)$ and $_S)$. ■

ma 2: If Assumption 1 is verified, then for any pair $'_S$") in $R^S \times R^S$ and any real number α in [0,1] the ing relation is true:

$,w_S') + (1 - \alpha)M(S,w_S'')$

$\subset M(S,\alpha w_S' + (1 - \alpha)w_S'').$

roof: Since each $\psi_j(\cdot)$ is concave, there is the follow- lation:

$\alpha X(S,w_S') + (1 - \alpha)X(S,w_S'')$

$\subset X(S,\alpha w_S' + (1 - \alpha)w_S'')$

for any pair (w_S',w_S'') in $R^S \times R^S$ and any α in [0,1]. By definition of the modified target set,

$x \in \alpha M(S,w_S') + (1 - \alpha)M(S,w_S'') \Longrightarrow \forall u_{M-S} \in U_{M-S}$

$x + g_S(u_{M-S}) \in \alpha X(S,w_S') + (1 - \alpha)X(S,w_S'')$

$\subset X(S,\alpha w_S' + (1 - \alpha)w_S'')$

and therefore the lemma is proved. ■

D. A First Necessary Condition

Now the following assumption is introduced.

Assumption 2:

a) There exists a coalitive Pareto optimal decision $\hat{u}_S$ such that

$\hat{w}_j \triangleq \inf\ [Q_j(\hat{u}_S,u_{M-S}):u_{M-S} \in U_{M-S}] > -\infty,$

$\forall\ j \in S.$

b) There exists a vector $\tilde{x}$ in X such that

$\inf\ \{\psi_j[\tilde{x} + g_S(u_{M-S})]:u_{M-S} \in U_{M-S}\} > \hat{w}_j,$

$\forall\ j \in S.$ ■

Thus a first necessary condition for coalitive Pareto optimality can be given.

Theorem 2: If Assumptions 1 and 2 are verified, then the decision $\hat{u}_S$ is CPO only if the point $h_S(\hat{u}_S)$ is a boundary point of the set $h_S(U_S)$.

Proof: By Assumption 2b) there exists $\tilde{x}$ in X and $\tilde{w}_S$ in R^S such that $\tilde{w}_S > \hat{w}_S$ and $\tilde{x} \in M(S,\tilde{w}_S)$. Define $\hat{x} \triangleq h_S(\hat{u}_S)$ and consider for any α in (0,1] the point $x_\alpha \triangleq \alpha\tilde{x} + (1 - \alpha)\hat{x}$. By Lemma 2, x_α is contained in the set $M(S,\alpha\tilde{w}_S + (1 - \alpha)\hat{w}_S)$. Since

$$\alpha\tilde{w}_S + (1 - \alpha)\hat{w}_S > \hat{w}_S, \qquad \forall\ \alpha \in (0,1],$$

by Lemma 1 the condition $x_\alpha \in h_S(U_S)$ is in contradiction with the coalitive Pareto optimality of $\hat{u}_S$, and therefore $h_S(\hat{u}_S)$ is a boundary point of $h_S(U_S)$. ■

This result is illustrated in Fig. 1 where X is E^2.

E. A Sufficient Condition for Coalitive Pareto Optimality

The problem is further specialized by assuming the following.

Assumption 3: For all $\bar{u}_S \in U_S$ and for all $j \in S$, there exists $\bar{u}_{M-S}{}^j \in U_{M-S}$ such that

$\bar{w}_j \triangleq Q_j(\bar{u}_S,\bar{u}_{M-S}{}^j)$

$= \inf\ [Q_j(\bar{u}_S,u_{M-S}):u_{M-S} \in U_{M-S}].$ ■

This means that the functionals φ_j considered in (2.1) are well defined and that the lower bounds they define are in fact minima. This assumption will be satisfied in particular if $g_S(U_{M-S})$ is compact and each ψ_j is continuous.

The next result defines an approximation of the modified target set $M(S,\bar{w}_S)$.

Lemma 3: Let $\bar{u}_S$ be given in U_S and let $\bar{u}_{M-S}{}^j$ in U_{M-S} be defined for each j in M as in Assumption 3. Thus con-

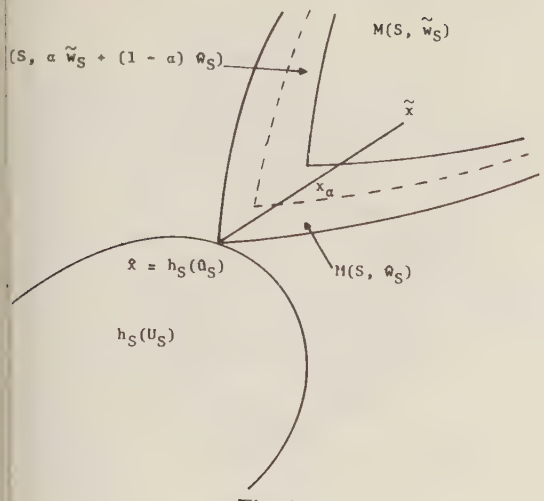


Fig. 1.

e gain vector $\bar{w}_S \triangleq \{Q_j(\bar{u}_S,\bar{u}_{M-S^j})\}_{j\in S}$, the target $,\bar{w}_S)$, and the modified target set $M(S,\bar{w}_S)$. Then: a)

$h_S(\bar{u}_S) + g_S(\bar{u}_{M-S^j}) \in \partial X(S,\bar{w}_S), \qquad \forall\, j \in S;$

ach j in S there exists a linear functional x_j^* in X^* t the convex cone defined in X by

$\triangleq \{x \in X : \langle x - \bar{x}, x_j^* \rangle \geq 0, \qquad \forall\, j \in S\},$

$\bar{x} \triangleq h_S(\bar{u}_S)$, contains the modified target set).

lemma shows that the support hyperplanes for the $(S,\bar{w}_S)$ at points x^j, when translated as to contain t $\bar{x}$, define a convex cone including the modified $M(S,\bar{w}_S)$.

Proof: Property a) is a direct consequence of Assumption 3. Property b) can be established by considering nts $x^j \triangleq h_S(\bar{u}_S) + g_S(\bar{u}_{M-S^j})$, for all $j \in S$, and g a set of linear functionals $x_j^* \in X^*$, for all $j \in S$, at

$\langle x - x^j, x_j^* \rangle \geq 0, \qquad \forall\, j \in S, \quad \forall\, x \in X(S,\bar{w}_S).$

always possible since $X(S,\bar{w}_S)$ is closed and convex erior points [by Assumption 2b)].

consider a point x contained in the set $M(S,\bar{w}_S)$ — hus, for some j in S, $\langle x - \bar{x}, x_j^* \rangle < 0$. Then consider the point

$$x_j' \triangleq x + g_S(\bar{u}_{M-S^j}). \tag{3.1}$$

ht-hand side can be written as

$$x_j' = x - \bar{x} + \bar{x} + g_S(\bar{u}_{M-S^j}) \tag{3.2}$$

$$= x - \bar{x} + x^j \tag{3.3}$$

$\langle x_j' - x^j, x_j^* \rangle = \langle x - \bar{x}, x_j^* \rangle < 0$; therefore, x_j' contained in $X(S,\bar{w}_S)$. But, by definition of the $S,\bar{w}_S)$,

$M(S,\bar{w}_S) \Longrightarrow x_j' = x + g_S(\bar{u}_{M-S^j}) \in X(S,\bar{w}_S);$

ere is a contradiction. So $M(S,\bar{w}_S)$ is included in ∎

Corollary 1: If $\bar{u}_S$ is not a CPO decision, then there exists a point x such that $x \in \mathcal{C}(\bar{x}) \cap h_S(U_S)$ and

$$\exists\, j \in S \text{ s.t. } \langle x - \bar{x}, x_j^* \rangle > 0.$$

Proof: By Lemma 1 there exists a gain vector w_S dominating $\bar{w}_S$ and a vector x such that $x \in M(S,w_S) \cap h_S(U_S)$. Since $M(S,w_S) \subset M(S,\bar{w}_S) \subset \mathcal{C}(\bar{x})$, the first part of the Corollary is proved.

By definition of $\mathcal{C}(\bar{x})$, x verifies

$$\langle x - \bar{x}, x_j^* \rangle \geq 0, \qquad \forall\, j \in S. \tag{3.4}$$

Assume that each inequality in (3.4) is an equality. Then it is shown that this implies a contradiction. Consider for each j in S the vector $x_j' = x + g_S(\bar{u}_{M-S^j})$ as defined in (3.1). Since x is contained in $M(S,w_S)$,

$$\psi_j(x_j') \geq w_j, \qquad \forall\, j \in S. \tag{3.5}$$

Now, by (3.1), (3.2), and the relation (3.4) where each inequality is an equality,

$$\langle x_j' - x^j, x_j^* \rangle = 0, \qquad \forall\, j \in S. \tag{3.6}$$

By construction, the hyperplane $H^j \triangleq \{x : \langle x - x^j, x_j^* \rangle = 0\}$ is a support of the convex set $X(S,\bar{w}_S)$ and, since x_j' is contained in H^j [by (3.6)],

$$\bar{w}_j \geq \psi_j(x_j'), \qquad \forall\, j \in S. \tag{3.7}$$

From (3.5) and (3.7), $w_j \leq \bar{w}_j$, $\forall\, j \in S$, which is in contradiction with the fact that w_S dominates $\bar{w}_S$. ∎

Now it is possible to give a sufficient condition which permits the checking of whether a boundary point of the set $h_S(U_S)$ corresponds to a CPO decision $\hat{u}_S$.

Theorem 3: Let $\hat{u}_S$ be such that $h_S(\hat{u}_S) \in \partial h_S(U_S)$. For all $j \in S$ define a linear functional x_j^* as in Lemma 3b). If there exists a linear functional x_0^* such that

a) $\langle h_S(\hat{u}_S), x_0^* \rangle = \sup\, [\langle h_S(u_S), x_0^* \rangle : u_S \in U_S]$;

b) $x_0^* = \sum_{j\in S} \alpha_j x_j^*$

where α_j is strictly positive for each j in S, then $\hat{u}_S$ is a coalitive Pareto optimal decision.

Proof: Define $\hat{x} \triangleq h_S(\hat{u}_S)$ and the convex cone

$$\mathcal{C}(\hat{x}) = \{x \in X : \langle x - \hat{x}, x_j^* \rangle \geq 0, \qquad \forall\, j \in S\};$$

then the properties a) and b) imply that the sets $h_S(U_S)$ and $\mathcal{C}(\hat{x})$ are separated by the closed hyperplane

$$H \triangleq \{x : \langle x - \hat{x}, x_0^* \rangle = 0\}. \tag{3.8}$$

Since every α_j is strictly positive,

$$H \cap \mathcal{C}(\hat{x}) = \{x : \forall\, j \in S, \langle x - \hat{x}, x_j^* \rangle = 0\}.$$

Assume now that $\hat{u}_S$ is not a coalitive Pareto optimal decision; then by Corollary 1 there exists a point x such that

$x \in \mathcal{C}(\hat{x}) \cap h_S(U_S)$ and, for one $j \in S$, $\langle x - \hat{x}, x_j^* \rangle > 0$.

This is a contradiction. ∎

The results obtained in Theorem 3 are illustrated in

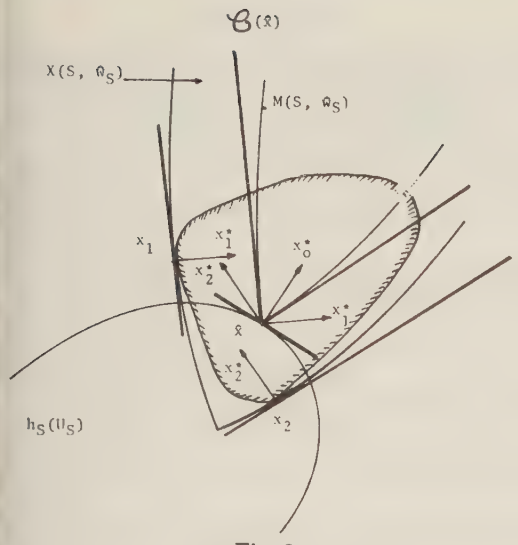


Fig. 2.

where X is E^2 and where a coalition of two players sidered.

IV. An Example in an Euclidean Space

ume that X is E^n, M contains three players $\{1,2,3\}$, is the coalition $\{1,2\}$. For each j in S assume that a concave functional which is C^1 on X. Finally, e that the perturbation set $g_S(U_{M-S})$ is finite: $_{-S}) \triangleq \{y^k : k = 1,\cdots,l\}$. It is readily seen that this ivalent to considering $g_S(U_{M-S})$ as defined by a polyhedron. Theorems 2 and 3 will be used for two of set $h_S(U_S)$.

e 1: $h_S(U_S) \triangleq \{x : \gamma(x) \leq 0\}$ where γ is a C^1 convex onal defined on X. For any x in X there exists $\xi^1(x)$ $^1(x)$ in $g_S(U_{M-S})$ such that

$$\psi_j[x + \xi^j(x)] = \min [\psi_j(x + y^k) : k = 1,\cdots,l].$$

ing Theorems 2 and 3, it is possible to obtain a of CPO decisions by solving first the following ions in x and α_0.

$$\gamma(x) = 0$$

$$_0\nabla\gamma(x) = \alpha_1\nabla\psi_1[x + \xi^1(x)] + \alpha_2\nabla\psi_2[x + \xi^2(x)]$$

ery α_1 and α_2 strictly positive. Each solution $(\alpha_0,\hat{x})$ s system for which α_0 is strictly positive corresponds CPO decision $\hat{u}_S$ such that $h_S(\hat{u}_S) = \hat{x}$.

e 2: $h_S(U_S)$ is a simplex. Then consider any extreme $\bar{x}$ of $h_S(U_S)$. At this point a cone of normals is d as

$$) \triangleq \{z \in E^n : z^T(x - \bar{x}) \leq 0, \quad \forall\, x \in h_S(U_S)\}.$$

the notation of the preceding case, an extreme point $_S(U_S)$ will correspond to a CPO decision $\hat{u}_S$ such that $) = \bar{x}$ if there exists a nonvoid intersection between and the cone generated by the gradients $\nabla\psi_1[\bar{x} +$ and $\nabla\psi_2[\bar{x} + \xi^2(\bar{x})]$.

V. Application to Linear Quadratic Systems

Consider a system governed by the state equation

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_S(t)u_S(t) + B_{M-S}(t)u_{M-S}(t) \quad (5.1)$$

where $x(t) \in E_n$, $A(t)$ is an $n \times n$ matrix, $B_S(t)$ is an $n \times s$ matrix, $u_S(t) \in E^s$, $B_{M-S}(t)$ is an $n \times (m - s)$ matrix, and $u_{M-S}(t) \in E^{m-s}$. One assumes that $A(t)$, $B_S(t)$, and $B_{M-S}(t)$ are continuous.

Given the initial state $x(t_0)$, we seek the controls $\hat{u}_S$ which are CPO with respect to the criteria

$$Q_j(u_S,u_{M-S}) \triangleq \psi_j(x(t_1)) \triangleq \tfrac{1}{2}x^T(t_1)C_jx(t_1), \qquad \forall\, j \in S$$

for some $t_1 > t_0$ and where C_j is negative definite, while the following constraints are satisfied:

$$\forall\, t \in [t_0, t_1], \qquad u_S(t) \in \Omega_S, \qquad u_{M-S}(t) \in \Omega_{M-S}$$

where Ω_S and Ω_{M-S} are compact subset of E^s and E^{m-s}, respectively.

Let $\phi(t,t_0)$ be the fundamental matrix solution of (5.1) with $\phi(t_0,t_0) = I$. Given the controls u_S and u_{M-S}, define

$$h_S(u_S) = \phi(t_1,t_0)x(t_0) + \phi(t_1,t_0)\int_{t_0}^{t_1} \phi(t,t_0)^{-1}B_S(t)u_S(t)\,dt$$

$$g_S(u_{M-S}) = \phi(t_1,t_0)\int_{t_0}^{t_1} \phi(t,t_0)^{-1}B_{M-S}(t)u_{M-S}(t)\,dt$$

and the decision sets

$$U_S \triangleq \{u_S : \forall\, t \in [t_0, t_1]\ u_S(t_1) \in \Omega_S\}$$

$$U_{M-S} \triangleq \{u_{M-S} : \forall\, t \in [t_0, t_1]\ u_{M-S}(t_1) \in \Omega_{M-S}\}.$$

It is well known that the sets $h_S(U_S)$ and $g_S(U_{M-S})$ are compact in E^n and that

$$\psi_j(x(t_1)) = \psi_j[h_S(u_S) + g_S(u_{M-S})], \qquad \forall\, j \in S$$

where each ψ_j is a concave continuous functional. Therefore, a straightforward application of Theorems 2 and 3 is possible when $h_S(U_S)$ is convex, i.e., when Ω_S is convex.

VI. Conclusion

In this paper a new concept of optimality has been defined which applies to the situation where a coalition has to make a decision. A sufficient condition for optimality has been proved for a class of topological games. This condition permits verification of the optimality of a decision corresponding to a boundary point of the set $h_S(U_S)$. A similar development could be designed to characterize optimal decisions corresponding to interior points of the set $h_S(U_S)$. A more difficult task would be the obtention of necessary conditions generalizing the scalarization process.

Acknowledgment

The author wishes to thank Dr. J.-L. Goffin for his helpful remarks and comments.

References

V. Starr and Y. C. Ho, "Nonzero-sum differential games," *ptimiz. Theory Appl.*, vol. 3, pp. 184–206, 1969.
—, "Further properties of nonzero-sum differential games," *ptimiz. Theory Appl.*, vol. 3, pp. 207–219, 1969.
. Vincent and G. Leitmann, "Control space properties of erative games," *J. Optimiz. Theory Appl.*, vol. 4, pp. 91–1970.
Blaquiere, "Sur la géométrie des surfaces de Pareto d'un jeu rentiel à *N* joueurs," *C.R. Acad. Sci. Paris*, ser. A, vol. 271, 744–747, 1970.
Blaquiere, L. Juricek, and K. E. Wiese, "Sur la géométrie surfaces de Paréto d'un jeu différentiel à *N* joueurs; rème du maximum," *C.R. Acad. Sci. Paris*, ser. A, vol. 271, 1030–1032, 1970.
Haurie, "Jeux quantitatifs à *M* joueurs," doctoral dissertation, Univ. Paris, Paris, France, 1970.
C. Delfour and S. K. Mitter, "Reachability of perturbed ar systems and min sup problems," *SIAM J. Contr.*, vol. 7, 521–533, 1969.
P. Bertsekas and I. B. Rhodes, "On the minimax reachity of targets and target tubes," *Automatica*, vol. 7, pp. 247, 1971.
). Glover and F. C. Schweppe, "Control of linear dynamic ems with set constrained disturbances," *IEEE Trans. omat. Contr.*, vol. AC-16, pp. 411–423, Oct. 1971.
Blaquiere and K. E. Wiese, "Jeux qualitatifs multi-étages personnes; coalitions," *C.R. Acad. Sci. Paris*, ser. A, vol. pp. 1280–1282, 1970.
J. Aumann, "A survey of cooperative games without side ments," in *Essays in Mathematical Economics*, M. Shubik, Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1969.
[12] W. F. Lucas, "Some recent developments in *n*-person game theory," *SIAM Rev.*, vol. 13, pp. 491–523, 1971.
[13] H. Scarf, "The core of a *n*-person game," *Econometrica*, no. 35, pp. 50–69, 1967.
[14] ——, "On the existence of a cooperative solution for a general class of *n*-person games," *J. Economic Theory*, no. 3, pp. 169–181, 1971.
[15] A. Haurie and M. Delfour, "Individual and collective rationality in a dynamic Pareto equilibrium," *J. Optimiz. Theory Appl.*, to appear.

Alain Haurie was born in Algiers, Algeria, in 1940. He received the "licence" and "doctorat" (3e cycle) degrees in applied mathematics from the University of Algiers, Algeria, and the University of Paris, Paris, France.

He is presently Associate Professor of Mathematics and Operations Research at the École des Hautes Etudes Commerciales, Montreal, P.Q., Canada. His areas of specialty include optimization, modeling of economic systems, and general system theory. He is currently conducting research on a game theoretic approach to economic planning and on the information structure in the health care delivery system.

ANNEXE 3.2

R.A.I.R.O.
(7e année, R-2, 1973, p. 91-105)

OPTIMALITE DANS UN SYSTEME MULTICRITERE ET PERTURBE AVEC APPLICATION A DES SYSTEMES DE COMMANDE LINEAIRES A COUTS QUADRATIQUES (1)

par A. HAURIE (2)

Résumé. — *Dans cet article on propose une définition de l'optimalité dans un système à plusieurs critères de performance et soumis à des perturbations. Cette définition généralise la notion de Pareto-optimalité et celle de critère « Min-Sup ».*

Pour une classe de systèmes particuliers on établit des conditions suffisantes d'optimalité qui offrent une grande similarité avec les principes de scalarisation des critères vectoriels utilisés pour les systèmes sans perturbation. Ces conditions sont directement applicables au cas de systèmes dynamiques décrits par des équations d'état linéaires et des critères quadratiques sur l'état terminal.

Finalement le problème est légèrement généralisé en considérant, en plus, une cible que l'on veut atteindre à coup sûr.

INTRODUCTION

Cet article est consacré à la définition de l'optimalité dans un système multicritère soumis à des perturbations, à l'établissement de conditions suffisantes d'optimalité et à leur application au cas de systèmes de commande linéaires à critères quadratiques terminaux.

La considération de systèmes soumis à des perturbations non aléatoires ou pilotés par plusieurs agents ayant chacun leur critère propre a rapproché la théorie de la commande optimale de la théorie des jeux (Réf. [1]-[10]).

Dans le cas de systèmes perturbés, des critères d'optimalité de type « Mini-Max » ou « Min-Sup » ont été proposés. Dans le cas de systèmes dont les performances sont évaluées suivant plusieurs critères, la notion de « Pareto-optimalité », tirée de la théorie des jeux coopératifs, a déjà été largement utilisée (Réf. [1]-[6]).

(1) Ce travail a bénéficié d'une subvention du Conseil des Arts du Canada (Fonds S-72 513).
(2) Professeur à l'École des Hautes Études Commerciales de Montréal.

Des systèmes présentant simultanément les deux aspects d'évaluation multicritère et de perturbation ne semblent pas avoir fait l'objet d'une étude approfondie. Cependant, de tels systèmes interviennent naturellement si une coalition de preneurs de décision doit choisir une décision « optimale » alors qu'elle ne contient pas tous les agents susceptibles d'affecter l'état du système (Réf. [11]-[16]).

Le concept d'optimalité que nous proposons généralise les conditions « Min-Sup » et de « Pareto-optimalité ». Pour une classe de systèmes particulière on peut obtenir des conditions suffisantes d'optimalité. Dans cette classe de système se trouvent les systèmes de commande linéaires à critères quadratiques sur l'état terminal.

2. DEFINITION GENERALE DE L'OPTIMALITE POUR UN SYSTEME MULTICRITERE PERTURBE

2.1. Système multicritère perturbé

Nous considérons un système défini par :

(i) un ensemble de décisions U

(ii) un ensemble de perturbations V

(iii) un critère de performance vectoriel :

$$Q : U \times V \rightarrow E^s$$

qui associe à une décision u et une perturbation v un vecteur de coûts :

$$Q(u, v) = \{ Q_j(u, v) \}_{j=1,\ldots,s}$$

Un tel système peut décrire un jeu de coalition sous forme normale (Réf. [16]). S est une coalition de s joueurs choisissant une stratégie commune dans l'ensemble U; V est l'ensemble des stratégies possibles pour les joueurs qui ne font pas partie de la coalition S. Les joueurs de S, ne disposant d'aucune information sur le choix d'une stratégie v par leurs adversaires, considèrent ces stratégies comme des perturbations affectant leurs gains décrits par le vecteur $Q(u, v)$.

Un système multicritère perturbé peut se rencontrer dans des circonstances qui ne se rapportent pas à une situation de jeu : Par exemple, si l'on veut piloter un système physique, soumis à des perturbations dues à l'environnement, tout en tenant compte de divers aspects des performances du système. Le rendez-vous spatial est un cas classique de problème multicritère où l'on doit tenir compte par exemple de la consommation de carburant de chaque satellite. Nous nous intéressons donc au cas où, en plus de l'aspect multicritère, on doit tenir compte de perturbations qu'on ne peut pas probabiliser.

2.2. Optimalité

Définition 2.1. — Une décision $u^* \in U$ sera dite « Sup-Pareto-Optimale » si $\forall u \in U$

$$\text{Sup}\{ Q_j(u, v) : v \in V \} \leqslant \text{Sup}\{ Q_j(u^*, v) : v \in V \} \; \forall j = 1, ..., s$$

implique nécessairement

$$\text{Sup}\{ Q_j(u, v) : v \in V \} = \text{Sup}\{ Q_j(u^*, v) : v \in V \} \; \forall j = 1, ..., s \quad \blacklozenge$$

Cette définition se ramène à la définition de la Pareto-optimalité quand $V = \varnothing$. Cette définition se ramène à une condition « Min-Sup » quand $s = 1$. Il s'agit donc d'une généralisation d'un concept d'optimalité classique pour l'étude des systèmes multicritères (Réf. [1]-[6]) et d'un concept d'optimalité classique pour l'étude des systèmes perturbés (Réf. [7]-[9]).

On peut interpréter cette condition d'optimalité en disant que, si on choisit la décision u^*, il est impossible de réduire la borne supérieure du coût suivant une composante du critère sans augmenter la borne supérieure du coût suivant une autre composante du critère. Par la suite nous dirons simplement « décision optimale » pour « décision Sup-Pareto Optimale ».

3. CONDITIONS SUFFISANTES D'OPTIMALITE

3.1. Hypothèses fondamentales

Nous dériverons des conditions suffisantes d'optimalité pour une certaine classe de problèmes satisfaisant aux hypothèses suivantes :

Hypothèse 3.1 : Il existe un espace euclidien E^n et deux fonctions :

$$h : U \to E^n, g : V \to E^n$$

telles que l'on ait :

$$\forall (u, v) \in U \times V \quad Q(u, v) = \psi[h(u) + g(v)]$$

où ψ est une application de E^n dans E^s,

$\psi(.) \triangleq \{ \psi_j(.) \}_{j=1,...,s}$, telle que chaque composante ψ_j soit une fonctionnelle convexe non constante et de classe C^1 sur E^n. $\blacklozenge$

Hypothèse 3.2 : L'ensemble perturbant $g(V)$ est compact dans E^n. $\blacklozenge$

3.2. Lemmes

Soit une décision $\bar{u} \in U$, il y correspond un point $h(\bar{u})$ qui est soit intérieur à l'ensemble $h(U)$ soit élément de sa frontière $\partial h(U)$.

Soit $\bar{x} \triangleq h(\bar{u})$.

Lemme 3.1 : Etant donné $\bar{x} \triangleq h(\bar{u})$, il existe s vecteurs $y^j(\bar{x}) \in \partial g(V)$ tels que :

$$\forall\, j = 1, ..., s \quad \text{Sup}\,[\psi_j(\bar{x} + y) : y \in g(V)] = \psi_j(\bar{x} + y^j(\bar{x}))\,.$$

Démonstration : Selon l'hypothèse 3.1, pour $\bar{x}$ donné chaque fonction $\psi_j(\bar{x} + (.))$ est une fonctionnelle continue et convexe sur E^n. Puisque $g(V)$ est compact, chaque fonction $\psi_j(\bar{x} + (.))$ atteint son maximum sur $g(V)$. Il ne reste donc qu'à montrer que ce maximum est nécessairement atteint en un point de la frontière $\partial g(V)$. Ceci est évident puisque, en un point intérieur de $g(V)$ on devrait avoir nécessairement :

$$\nabla\, \psi_j(\bar{x} + y^j(\bar{x})) = 0$$

ce qui, du fait de la convexité de ψ_j, entraîne que le point $\bar{x} + y^j(\bar{x})$ est un minimum local pour ψ_j. Ceci est une contradiction si ψ_j n'est pas une fonction constante. ✦

Lemme 3.2 : Étant donné $\bar{x} \triangleq h(\bar{u})$ définissons les s gradients :

$$z^j \triangleq \nabla\, \psi_j(\bar{x} + y^j(\bar{x})) \qquad j = 1, 2, ..., s$$

et formons le cône :

$$C(\bar{x}) \triangleq \{\, x : < x - \bar{x}, z^j > \leqslant 0 \qquad \forall\, j = 1, ..., s$$
$$\text{et} < x - \bar{x}, z^l > < 0 \qquad \text{pour un } l \,\}$$

Dans ces conditions, si l'on a : $C(\bar{x}) \cap (hU) = \varnothing$, alors $\bar{u}$ est une décision optimale.

Démonstration : Supposons que l'on ait $C(\bar{x}) \cap h(U) = \varnothing$ cependant que $\bar{u}$ n'est pas optimal. Il existe donc $\hat{x} \in h(U)$ tel que l'on ait :

$$\forall\, j = 1, ..., s \qquad \text{Sup}\,[\psi_j(\hat{x} + y) : y \in g(V)] \leqslant \psi_j(\bar{x} + y^j(\bar{x})) \qquad (3.1)$$

et pour un l

$$\text{Sup}\,[\psi_l(\hat{x} + y) : y \in g(V)] < \psi_l(\bar{x} + y^l(\bar{x}))$$

Par hypothèse on a : $\hat{x} \notin C(\bar{x})$ et donc aussi :

$$\forall\, j = 1, ..., s \qquad < \hat{x} - \bar{x}, z^j > \geqslant 0 \qquad (3.2)$$

ou bien $\exists\, l \in \{1, ..., s\}$ *t.q.* $< \hat{x} - \bar{x}, z^l > > 0$.

Considérons alors pour chaque $j = 1. ..., s$ la valeur

$$\psi_j(\hat{x} + y^j(\bar{x})) = \psi_j[(\hat{x} - \bar{x}) + (\bar{x} + y^j(\bar{x}))]$$

On a d'après la convexité de ψ_j et (3.2) :

$$\forall j = 1, ..., s \; \psi_j(\hat{x} + y^j(\bar{x})) - \psi_j(\bar{x} + y^j(\bar{x})) \geqslant < \hat{x} - \bar{x}, \nabla \psi_j(\bar{x} + y^j(\bar{x})) >$$

$$= < \hat{x} - \bar{x}, z_j > \geqslant 0.$$

ou bien

$$\psi_l(\hat{x} + y^l(\bar{x})) - \psi_l(\bar{x} + y^l(\bar{x})) > 0$$

ce qui contredit la condition (3.1). Donc $\bar{u}$ est optimal. ✦

3.3. Conditions suffisantes d'optimalité

Nous pouvons établir le résultat suivant qui permet de caractériser certaines décisions optimales.

Théorème 3.1 : Soit $\bar{u} \in U$ et $\bar{x} \triangleq h(\bar{u})$. Définissons les s gradients :

$$z^j \triangleq \nabla \psi_j(\bar{x} + y^j(\bar{x})) \quad = 1, ..., s$$

On a les propriétés suivantes :

(i) S'il existe s scalaires $\alpha_j > 0, j = 1, ..., s$ tels que l'on ait :

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_j z^j = 0 \tag{3.3}$$

alors $\bar{u}$ est optimal.

(ii) S'il existe un vecteur $z^0 \in E^n$ et s scalaires $\alpha_j > 0, j = 1, ..., s$ tels que l'on ait :

(*a*) $$\forall x \in h(U) \qquad < x - \bar{x}, z^0 > \geqslant 0 \tag{3.4}$$

(*b*) $$z^0 = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j z^j \tag{3.5}$$

alors $\bar{u}$ est optimal.

Démonstration : Si la condition (3.3) est vérifiée alors le cône $\mathcal{C}(\bar{x})$ est vide donc $h(U) \cap \mathcal{C}(\bar{x}) = \varnothing$ et $\bar{u}$ est optimal d'après le lemme 3.2. Ceci établit la propriété (i). Si la condition (3.4) est satisfaite alors $\bar{x}$ est un élément de la frontière $\partial h(U)$ et z^0 est une normale à un plan d'appui de $h(U)$ en $\bar{x}$. Si la condition (3.5) est satisfaite alors on a :

$$\forall x \in \mathcal{C}(\bar{x}) \qquad < x - \bar{x}, z^0 > < 0 \tag{3.6}$$

En effet pour un $l \in \{1, ..., s\}$ on a : $\forall x \in \mathcal{C}(\bar{x})$

$$< x - \bar{x}, z^0 > = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j < x - \bar{x}, z^j > \leqslant \alpha_l < x - \bar{x}, z^l > < 0 \tag{3.7}$$

D'après les expressions (3.6) et (3.5) z^0 est une normale en $\bar{x}$ à un plan séparant $h(U)$ et $\mathcal{C}(\bar{x})$. De plus l'expression (3.7) montre que ce plan séparant est disjoint de $\mathcal{C}(\bar{x})$. Donc on a encore $h(U) \cap \mathcal{C}(x) = \varnothing$, donc $\bar{u}$ est optimal. ✦

4. SYSTEMES DE COMMANDE LINEAIRES A COUTS QUADRATIQUES TERMINAUX

4.1. Définition du système de commande

Considérons un système décrit par l'équation d'état :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + D(t)v(t) \tag{4.1}$$

où $x(t) \in E^n$, $A(t)$ est une matrice $n \times n$, $B(t)$ est une matrice $n \times m$, $u(t) \in E^m$, $D(t)$ est une matrice $n \times p$, $v(t) \in E^p$.

Nous supposons que les matrices $A(t)$, $B(t)$ et $D(t)$ sont continues sur un intervalle $(0, T)$.

Soit $x(t_0)$ l'état initial en $t_0 > 0$, une commande admissible est une fonction mesurable

$$u : t \to u(t) \in \Omega \quad , \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad , \quad t_1 < T$$

où Ω est un ensemble de contrainte compact, convexe fixé dans E^m.

Une perturbation possible est une fonction mesurable

$$v : t \to v(t) \in \Xi \quad , \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad , \quad t_1 < T$$

où Ξ est un ensemble compact, convexe fixé dans E^p.

Finalement soit un critère de performance vectoriel défini par la fonction de l'état terminal :

$$\psi : x(t_1) \to \psi[x(t_1)] = \{ \psi_j[x(t_1)] \}_{j=1, 2, \ldots, s} \in E^s \tag{4.2}$$

Nous voulons caractériser une famille de commandes u, optimales pour le système perturbé (4.1) relativement au critère vectoriel (4.2).

Soit $\Phi(t)$ la matrice fondamentale solution de l'équation homogène associée à (4.1) avec $\Phi(t_0) = I$. Pour une commande u et une perturbation v admissibles, définissons les expressions :

$$h(u) \underset{=}{\Delta} \Phi(t_1)x(t_0) + \Phi(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t)^{-1} B(t)u(t)dt \tag{4.3}$$

et

$$g(v) \underset{=}{\Delta} \Phi(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t)^{-1} D(t)v(t)dt \tag{4.4}$$

alors l'état terminal $x(t_1)$ associé par (4.1) à la commande u, la perturbation v et l'état initial $x(t_0)$ est donné par :

$$x(t_1) = h(u) + g(v).$$

Donc la fonction critère, (4.2), peut s'écrire :

$$\psi[x(t_1)] = \psi[h(u) + g(v)] \triangleq Q(u, v) \tag{4.5}$$

où Q est définie sur l'ensemble $U \times V$ des commandes admissibles et des perturbations possibles.

Nous voyons que nous retrouvons donc les termes de notre analyse précédente si nous supposons que chaque fonctionnelle ψ_j est convexe de classe C_1 sur E^n. C'est effectivement le cas si chaque ψ_j s'écrit :

$$\psi_j(x) = \frac{1}{2} x^T C_j x \tag{4.6}$$

où la matrice C_j est définie positive.

4.2. Application des conditions suffisantes

Cherchons d'abord à caractériser des commandes optimales $\hat{u}$ telles que $h(\hat{u})$ soit intérieur à l'ensemble $h(U)$.

Soit $\hat{x}(t_1) \triangleq h(\hat{u})$. Si l'ensemble de contraintes Ξ est compact l'ensemble $g(V)$ est aussi compact (cf. Référence [17] p. 69) donc il existe $\zeta^j(t_1) \in g(V)$ tel que :

$$\psi_j[x(t_1) + \zeta^j(t_1)] = \text{Sup}\,\{\psi_j[\hat{x}(t_1) + y] : y \in g(V)\}$$

et ceci pour $j = 1, 2, \ldots, s$.

De plus on a montré (Lemme 3.1) que chaque $\zeta^j(t_1)$ est nécessairement un point de la frontière de $g(V)$. Cela revient donc à dire que la perturbation v^j telle que $g(v^j) = \zeta^j(t_1)$ est une commande extrémale pour le système :

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + D(t)v(t) \tag{4.7}$$

avec pour état initial $y(t_0) = 0$.

D'après un résultat bien connu de la théorie de la commande optimale (cf. Référence [17], p. 73), v sera extrémale pour le système (4.7) si et seulement si il existe une solution non nulle de l'équation adjointe :

$$\dot{\eta}_j(t) = -\eta_j(t)A(t)$$

telle que presque partout sur $[t_0, t_1]$ on ait

$$\eta_j(t)D(t)v^j(t) = \underset{v \in \Xi}{\text{Max}}\, \eta(t)D(t)v \tag{4.8}$$

et de plus $\eta_j(t_1)$ est une normale extérieure à un hyperplan de support pour l'ensemble $g(V)$ au point $\zeta^j(t_1)$.

Nous pouvons dès lors appliquer le théorème 3.1 (i) ce qui établit :

Théorème 4.1 : Pour le système défini en section 4.1, s'il existe une commande $\hat{u}$ et s scalaires α_j strictement positifs tels que les m systèmes d'équations suivants définis pour $j = 1, ..., s$:

$$\dot{y}^j(t) = A(t)y^j(t) + D(t)v^j(t) \tag{4.9}$$

$$\dot{\eta}_j(t) = -\eta_j(t)A(t) \tag{4.10}$$

avec les conditions aux bornes :

$$y^j(t_0) = 0 \tag{4.11}$$

$$\eta_j(t_1) = \nabla\psi_j[h(\hat{u}) + y^j(t_1)] = (h(\hat{u}) + y^j(t_1))^T C_j \tag{4.12}$$

et vérifiant la condition :

$$\eta_j(t)D(t)v^j(t) = \operatorname*{Max}_{v(t)\in\Xi} \eta_j(t)D(t)v(t) \tag{4.13}$$

presque partout sur $[t_0, t_1]$, aient une solution telle que :

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_j \eta_j(t_1) = 0 \tag{4.14}$$

alors $\hat{u}$ est une commande optimale. ✦

De la même façon une application directe du théorème 3.1 (ii) nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.2 : S'il existe une commande $\hat{u}$ et s scalaires α_j strictement positifs tels que les s systèmes d'équations suivants définis pour $j = 1, ..., s$:

$$\dot{y}^j(t) = A(t)y^j(t) + D(t)v^j(t) \tag{4.15}$$

$$\dot{\eta}_j(t) = -\eta_j(t)A(t) \tag{4.16}$$

avec les conditions aux bornes

$$y^j(0) = 0$$

$$\eta_j(t_1) = \nabla\psi_j[h(\hat{u}) + y^j(t_1)] = (h(\hat{u}) + y^j(t_1))^T C_j \tag{4.17}$$

et vérifiant presque partout les conditions

$$\eta_j(t)D(t)v^j(t) = \operatorname*{Max}_{v(t)\in V} \eta_j(t)D(t)v(t) \tag{4.18}$$

et le système :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\hat{u}(t) \tag{4.19}$$

$$\dot{\eta}_0(t) = -\eta_0(t)A(t) \tag{4.20}$$

avec les conditions aux bornes

$$x(0) = x_0 \tag{4.21}$$
$$\eta_0(t_1) \neq 0$$

vérifiant presque partout les conditions

$$\eta_0(t)B(t)\hat{u}(t) = \operatorname*{Min}_{u(t)\in U} \eta_0(t)B(t)u(t) \tag{4.23}$$

aient des solutions telles que l'on ait :

$$\eta_0(t_1) = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \eta_j(t_1)$$

alors $\hat{u}$ est une commande optimale. ✦

5. OPTIMALITE SUR UNE CIBLE POUR UN SYSTEME MULTICRITERE PERTURBE

5.1. Un problème d'accessibilité optimale

Nous considèrerons dans cette section une généralisation du modèle fondamental décrit en section 2, obtenue en ajoutant une contrainte impliquant à la fois la décision u et la perturbation v. Plus précisément nous considérerons une fonction

$$\varphi : U \times V \to H$$

où H est un ensemble donné et nous nous imposerons la contrainte

$$\varphi(u, v) \in \Lambda \subset H \tag{5.1}$$

où Λ sera une cible fixée dans H. Nous dirons alors :

Définition 5.1. — Une décision $\hat{u}$ sera optimale sur la cible Λ si :

(i) Λ est fortement accessible suivant $\hat{u}$, c'est-à-dire :

$$\forall\, v \in V \quad \varphi(\hat{u}, v) \in \Lambda \tag{5.2}$$

(ii) Pour toute décision u telle que

$$\forall\, v \in V \quad \varphi(u, v) \in \Lambda \quad , \quad \text{on a :}$$
$$\operatorname{Sup}\{ Q_j(u, v) : v \in V \} \leqslant \operatorname{Sup}\{ Q_j(\hat{u}, v) : v \in V \}$$
$$\Rightarrow \operatorname{Sup}\{ Q_j(u, v) : v \in V \} = \operatorname{Sup}\{ Q_j(\hat{u}, v) : v \in V \} \tag{5.3}$$

5.2. Un problème avec cible dans l'espace d'état

Considérons un système multicritère perturbé vérifiant l'hypothèse 3.1, c'est-à-dire :

$$Q(u, v) = \psi(h(u) + g(v)) \tag{5.4}$$

$$x \triangleq h(u) + g(v) \in E^n \tag{5.5}$$

$$\psi : E^n \to E^s, \psi = \{ \psi_j \}_{j=1,\ldots,s}$$

$$Q_j(u, v) = \psi_j(x) \tag{5.6}$$

E^n est alors l'espace d'état du système, u la commande, v la perturbation. Nous considérerons ici une cible Λ dans E^n avec la contrainte $x \in \Lambda$. On a donc :

$$\varphi : U \times V \to E^n$$

$$(u, v) \to x = h(u) + g(v)$$

et la contrainte $\varphi(u, v) \in \Lambda$.

6. CONDITIONS SUFFISANTES D'OPTIMALITE SUR UNE CIBLE

Nous généraliserons dans cette section les résultats obtenus en 3, pour un système satisfaisant aux hypothèses 3.1 et 3.2.

6.1. Hypothèse fondamentale

Nous supposerons que $\Lambda \subset E$ est un ensemble convexe fermé.

6.2. Résultats fondamentaux sur l'accessibilité pour un système perturbé

Les problèmes d'accessibilité pour des systèmes perturbés ont été étudiés dans les références [7]-[9]. Nous retiendrons pour notre étude les résultats suivants.

Lemme 6.1. Soit M la cible modifiée définie par :

$$M \triangleq \{ x \in E^n : \{ x \} + g(V) \subset \Lambda \} \tag{6.1}$$

alors :

(i) Λ est fortement accessible suivant u si et seulement si :

$$h(u) \in M \tag{6.2}$$

(ii) Si Λ est convexe fermé, M l'est aussi. ✦

Corollaire 6.1. $h(u) \in M$ si et seulement si :

$$\forall z \in E^n, \| z \| = 1,$$
$$\sigma_u(z) \triangleq \text{Sup} \{ z^T x : x \in \{ h(u) \} + g(V) \}$$
$$\leqslant \text{Sup} \{ z^T x : x \in \Lambda \} \triangleq \sigma_\Lambda(z) \qquad (6.3)$$

Démonstration : On doit avoir $\{ h(u) \} + g(V) \subset \Lambda$. Puisque Λ est convexe fermé ceci est équivalent à :

$$\text{Co} [\{ h(u) \} + g(V)] \subset \Lambda \qquad (6.4)$$

ou Co [.] désigne la fermeture convexe. (6.3) est alors un résultat bien connu sur les fonctionnelles du support d'ensembles convexes fermés, équivalent à (6.4). ✦

6.3. Conditions suffisantes

Théorème 6.1 : Soit $\bar{u} \in U$ et $\bar{x} = h(\bar{u})$.

(i) Si l'on a :

$$\text{Sup} \{ \sigma_{\bar{u}}(z) - \sigma_\Lambda(z) : \|z\| = 1 \} \leqslant 0 \qquad (6.5)$$

et si les conditions (i) ou (ii) du théorème 3.1 sont satisfaites alors $\bar{u}$ est optimal sur la cible Λ

(ii) Si l'on a :

$$\sigma_{\bar{u}}(\bar{z}) - \sigma_\Lambda(\bar{z}) = \text{Sup} \{ \sigma_{\bar{u}}(z) - \sigma_\Lambda(z) : \|z\| = 1 \} = 0 \qquad (6.6)$$

et si, avec les notations du théorème 3.1, il existe s scalaires $\alpha_j > 0, j = 1, ..., s$, tels que l'on ait :

$$-\bar{z} = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j z^j \qquad (6.7)$$

alors $\bar{u}$ est optimal sur la cible Λ.

Démonstration : D'après les lemmes 3.2 et 6.1 (i) si l'on a :

$$h(\bar{u}) \in M \qquad (6.8)$$

et

$$C(\bar{x}) \cap h(U) \cap M = \varnothing \qquad (6.9)$$

alors $\bar{u}$ est une décision optimale sur la cible Λ.

Démontrons la partie (i) du théorème. La condition (6.5) implique (6.8) d'après le corollaire 6.1.

D'autre part les conditions (i) ou (ii) du théorème (3.1) impliquent :

$$\mathcal{C}(\bar{x}) \cap h(U) = \varnothing$$

donc aussi (6.9). Ce qui établit (i).

Démontrons la partie (ii) du théorème. Puisque $g(V)$ est compact il existe $\bar{y} \in g(V)$ tel que :

$$z^T(\bar{x} + \bar{y}) = \text{Sup}\{ z^T x : x \in \{ \bar{x} \} + g(V) \}$$
$$= \text{Sup}\{ z^T x : x \in \Lambda \} \tag{6.10}$$

D'après (6.10) z^T définit la normale en $\bar{x} + \bar{y}$ à un hyperplan d'appui de l'ensemble convexe Λ tel que :

$$\forall\, x \in \Lambda \quad z^T(x - [\bar{x} + \bar{y}]) \leqslant 0 \tag{6.11}$$

Nous allons montrer que z est aussi la normale en $\bar{x}$ à un hyperplan d'appui de l'ensemble M. Il suffit pour cela de montrer que l'on a :

$$\forall\, x \in M \quad z^T(x - \bar{x}) \leqslant 0 \tag{6.12}$$

Supposons que (6.12) ne soit pas vérifié pour $\tilde{x} \in M$, donc :

$$\tilde{x} \in M \qquad \text{et} \qquad z^T\tilde{x} > z^T\bar{x} \tag{6.13}$$

considérons alors le point

$$x \triangleq \tilde{x} + \bar{y} \in \tilde{x} + g(V)$$

On a :

$$z^T x = z^T(\tilde{x} - \bar{x} + [\bar{x} + \bar{y}]) > z^T(\bar{x} + \bar{y})$$

et donc d'après (6.11) $x \notin \Lambda$; ceci est en contradiction avec l'hypothèse : $\tilde{x} \in M$ faite en (6.13) donc (6.12) est vrai.

Si la condition (6.7) est vraie l'hyperplan de normale $\bar{z}$ en $\bar{x}$ est un hyperplan séparant pour les ensembles M et $\mathcal{C}(\bar{x})$, disjoint de $\mathcal{C}(\bar{x})$ donc on a :

$$\mathcal{C}(\bar{x}) \cap M = \varnothing$$

donc aussi (6.9). ✦

7. APPLICATION A UN SYSTEME DE COMMANDE LINEAIRE, A CIBLE POLYHEDRALE

Considérons le système défini en section 4.1 et la cible définie à l'instant final t_1 par :

$$\Lambda \triangleq \{ x : \lambda_k{}^T x \leqslant a_k, k = 1, ..., p \}$$

où $\lambda_k, k = 1, ..., p$ sont p vecteurs de norme unité donnés dans E^n et a_k, p scalaires.

Théorème 7.1 : $\bar{u}$ est une commande d'accessibilité forte pour Λ si et seulement si les m systèmes d'équations suivants définis pour $k = 1, ..., p$:

$$\dot{y}^k(t) = A(t)y^k(t) + D(t)v^k(t)$$

$$\dot{\eta}_k(t) = -\eta_k(t)A(t)$$

avec les conditions aux bornes :

$$y^k(t_0) = 0$$

$$\eta_k(t_1) = \lambda_k$$

et vérifiant la condition :

$$\eta_k(t)D(t)v^k(t) = \operatorname*{Max}_{v(t)\in S} \eta_k(t)D(t)v(t)$$

presque partout sur $[t_0, t_1]$, ont une solution telle que :

$$\lambda_k^T(h(\bar{u}) + y^k(t_1)) \leqslant a_k, k = 1, ..., p$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le corollaire 6.1 et de remarquer que la perturbation $v^k(.)$ qui fait atteindre la borne supérieure de $\lambda_k^T x$ pour x dans $\{ h(\bar{u}) \} + g(V)$ est une commande extrémale pour le système :

$$\dot{y} = A(t)y + D(t)v.$$

nous pouvons alors appliquer directement le théorème 6.1 pour généraliser les théorèmes 4.1 et 4.2.

8. CONCLUSION

Les systèmes perturbés que nous avons étudiés peuvent être réduits à des systèmes non perturbés en considérant les fonctionnelles auxiliaires :

$$\theta_j : U \to R \cup \{ \infty \} \triangleq \bar{R}$$

$$\theta_j(u) = \text{Sup} \{ Q_j(u, v) : v \in V \} \qquad j = 1, ..., s$$

et l'ensemble de contrainte sur U, auxiliaire :

$$W \triangleq \{ u \in U : \varphi(u, V) \subset \Lambda \}$$

Dès lors les systèmes perturbés définis en sections 2.1 et 5.1 se ramènent au système non perturbé :

$$u \in W, \theta_j : W \to \bar{R} \qquad j = 1, ..., s$$

Cependant ce travail de réduction peut-être considérable et conduire à des fonctionnelles θ_j difficiles à analyser. Les théorèmes établis précédemment permettent d'engendrer une classe de décisions ou commandes optimales à partir seulement de considérations relatives aux données du problème, c'est-à-dire des fonctionnelles Q_j, des perturbations $v \in V$ et de la cible Λ. Sans contenir nécessairement l'ensemble de toutes les solutions du problème d'optimisation multicritère, cette classe de solution peut être assez riche pour fournir une solution acceptable.

Evidemment il serait souhaitable de compléter ces conditions suffisantes par des conditions nécessaires de même nature qui permettraient de généraliser aux systèmes multicritères perturbés les principes du processus de scalarisation des critères vectoriels utilisé en l'absence de perturbation. Cette généralisation n'est cependant pas évidente. Une tentative dans ce sens est indiquée dans les références [18] et [19].

Un autre développement souhaitable serait de développer une théorie de l'optimisation multicritère de systèmes perturbés avec commande en boucle fermée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. W. Starr et Y. C. Ho, *Nonzero-Sum Differential Games*, JOTA, 1969, 3, 184-206.

[2] A. W. Starr et Y. C. Ho, *Further Properties of Nonzero-Sum Differential Games*, JOTA, 1969, 3, 207-219.

[3] T. L. Vincent et G. Leitmann, *Control Space Properties of cooperative games*, JOTA, 1970, 4, 91-113.

[4] A. Blaquiere, *Sur la géométrie des surfaces de Pareto d'un jeu différentiel à N joueurs*, C. R. Acad. Sc. Paris, sér. A, 1970, 271, 744-747.

[5] A. Blaquiere, L. Juricek et K. E. Wiese, *Sur la géométrie des surfaces de Pareto d'un jeu différentiel à N joueurs : théorème du maximum*, C. R. Acad. Sc. Paris, sér. A, 1970, 271, 1030-1032.

[6] A. Haurie, *Jeux quantitatifs à M joueurs*, doctoral dissertation, Paris, 1970.

[7] M. C. Delfour et S. K. Mitter, *Reachability of Perturbed Linear Systems and Min Sup Problems*, SIAM J. on Control, 1969, 7, 521-533.

[8] D. P. Bertsekas et I. B. Rhodes, *On the Minimax Reachability of Targets and Target Tubes*, Automatica, 1971, 7, 233-247.

[9] J. D. Glover et F. C. Schweppe, *Control of Linear Dynamic Systems with Set Constrained Disturbances*, IEEE Trans. on Control, AC-16, 1971, 411-423.

[10] A. Blaquiere et K. E. Wiese, *Jeux qualitatifs multi-étages à N personnes ; coalitions*, C. R. Acad. Sc. Paris, sér. A, 1970, 270, 1280-1282.

[11] R. J. Aumann, *A Survey of Cooperative Games without side Payments*, in Essays in Mathematical Economics, ed. M. Shubik, Princeton, 1969.

[12] W. F. Lucas, *Some Recent Developments in n-Person Game Theory*, SIAM Review, 1971, 13, 491-523.

[13] H. Scarf, *The Core of a n-Person Game*, Econometrica No 35, 1967, pp. 50-69.

[14] H. Scarf, *On the Eexistence of a Cooperative Solution for a General class of n-Person Games*, Journal of Economic Theory No 3, 1971, pp. 169-181.

[15] A. Haurie et M. Delfour, *Individual and Collective Rationality in a Dynamic Pareto Equilibrium*, to appear in J.O.T.A.

[16] A. Haurie, *On Pareto Optimal Decisions for a Coalition of a Subset of Players*, IEEE Transactions on Automatic Control, avril 1973.

[17] E. B. Lee et L. Markus, *Foundations of Optimal Control Theory*, J. Wiley, 1967.

[18] A. Haurie et J. L. Goffin, *Optimality for a Multicriterion perturbed System*, short paper 1972 Allerton's conference on Circuit and System Theory.

[19] J. L. Goffin et A. Haurie, *Necessary Conditions and Sufficient conditions for Pareto Optimality in a Multicriterion Perturbed System*, 5th IFIP Conference, On Optimization Techniques, Rome, mai 1973.

ANNEXE 3.3

Lecture Notes in Computer Science

Edited by G. Goos, Karlsruhe and J. Hartmanis, Ithaca
Series: I.F.I.P. TC7 Optimization Conferences

3

5th Conference on Optimization Techniques

Part I

Edited by R. Conti and A. Ruberti

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1973

NECESSARY CONDITIONS AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR PARETO OPTIMALITY IN A MULTICRITERION PERTURBED SYSTEM*

JEAN-LOUIS GOFFIN ALAIN HAURIE

Ecole des Hautes Etudes Commerciales - Montréal

1. INTRODUCTION

Vector valued optimization problems have recently attracted a renewed attention. Decision making in engineering and economic systems is confronted by a multiplicity of goals, and it seems necessary to take it into account directly, rather than finding an a priori mix of goals.

The concept of Pareto optimality has been extensively studied in the realm of economic theory and more recently in the field of optimal control theory ([1] - [6]).

In addition to the complexity due to multiple goals, the decision-maker is often faced with perturbations or uncertainties which influence the consequences of his actions. These disturbances, if their probability distribution cannot be assessed can be modelled as set-constrained perturbations following the lines given in Refs [7] - [9]. This description is quite fitting if the perturbations are caused by the existence of other decision makers - or players - which can affect the consequence of the decision of a coalition of players[10].

Formally the system is described by :

(i) A decision set X

(ii) A perturbation set Y

(iii) A vector valued cost criterion

$$\psi : X \times Y \to R^p \ , \ (x, y) \mapsto \psi(x, y) \triangleq (\psi_j(x, y))_{j=1,\ldots,p}$$

In section 2, the optimality criterion is precisely defined as a generalization of Pareto-optimality.
In section 3, the scalarization process is studied for this class of system.
In section 4, a Lagrange multiplier theorem is proved.

*This work was supported by the Canada Council under Grants S72-0513 and S73-0268.

Notation

$$\psi(.) \triangleq (\psi_j(.))_{j=1,\ldots,p}$$

$$\forall x, y \in R^p \quad x \leq y \text{ if } x_j \leq y_j \quad j = 1, \ldots, p$$

$$R^p_+ \triangleq \{z \in R^p : 0 \leq z\}$$

$\psi'_x(x, y)$ will denote the gradient w.r.t. x of the fonction $\psi(., y)$ at point x.

$\varphi'_j(x; h)$ will denote the directional derivative in the direction h of the function $\varphi_j(x)$.

2. DEFINITION OF OPTIMALITY

To every decision x in X is associated a set of possible outcomes :

$$\psi(x, Y) \triangleq \{\psi(x, y) : y \in Y\}$$

Any preorder given on $\{\psi(x, Y) : x \in X\}$ will induce a preorder on X. Given a preorder $(X, \prec)$ a minimal element will be called a Pareto-minimum in X.

In this paper the following preorder will be used :

$$x \prec x' \text{ if } \operatorname{Sup}\ \psi(x, Y) \leq \operatorname{Sup}\ \psi(x', Y)$$

where $\operatorname{Sup}\ \psi(x, Y)$ is the L.U.B. of $\psi(x, Y)$ in $(R^p, \leq)$. Note that :

$$\operatorname{Sup}\ \psi(x, Y) = (\operatorname{Sup}\ \psi_j(x, Y))_{j=1,\ldots,p}$$

Thus the following definition of Pareto optimality is adopted.

Definition 2.1 : x^* in X is Pareto-optimal if, for all x in X :

$$\operatorname{Sup}\{\psi_j(x, y) : y \in Y\} \leq \operatorname{Sup}\{\psi_j(x^*, y) : y \in Y\} \quad \forall j \in \{1, \ldots, p\}$$

implies that :

$$\operatorname{Sup}\{\psi_j(x, y) : y \in Y\} = \operatorname{Sup}\{\psi_j(x^*, y) : y \in Y\} \quad \forall j \in \{1, \ldots, p\}$$

We can define the auxiliary cost function $\varphi: X \to R^p$ by :

$$\varphi(x) \triangleq \operatorname{Sup}\ \psi(x, Y).$$

Definition 2.1 is then equivalent to :

x^* in X is Pareto optimal if for all x in X :

$$\varphi(x) \leq \varphi(x^*) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(x^*).$$

In order to characterize Pareto optimal elements, two approaches will be used : The scalarization process [1] - [6] and a direct method based on an extension of the theorem of Kuhn and Tucker [11].

3. THE SCALARIZATION PROCESS

The main results in optimization with a vector-valued criterion revolve around the process of scalarization [1] - [6]. In the presence of perturbations the scalarization cannot, in general, be performed directly on the cost functions as for $\alpha_j > 0$, $j = 1,\ldots, p$ the condition : $\hat{x} \in X$ and :

$$\text{Sup}\ \{ \sum_{j=1}^{p} \alpha_j\ \psi_j(\hat{x}, y) : y \in Y\} \leq \text{Sup}\{ \sum_{j=1}^{p} \alpha_j\ \psi_j(x, y) : y \in Y\}$$

$$\forall\, x \in X$$

does not imply that $\hat{x}$ is Pareto-optimal.(†)

The scalarization must be applied to the auxiliary cost function . First we state the following well known result.

Theorem 3.1 : Let $\alpha_j > 0$, $j = 1,\ldots, p$ and x^* in X be such that :

$$\forall\, x \in X \qquad \sum_{j=1}^{p} \alpha_j\ \varphi_j(x^*) \leq \sum_{j=1}^{p} \alpha_j\ \varphi_j(x)$$

then x^* is Pareto optimal.

Corollary 3.1 : Let $\alpha_j > 0$, $j = 1,\ldots, p$ and x^* in X be such that :

$$\forall\, x \in X \quad \underset{\substack{y_1 \in Y \\ y_2 \in Y \\ \vdots \\ y_p \in Y}}{\text{Sup}} \ \sum_{j=1}^{p} \alpha_j\ \psi_j(x^*, y_j) \leq \underset{\substack{y_1 \in Y \\ y_2 \in Y \\ \vdots \\ y_p \in Y}}{\text{Sup}} \ \sum_{j=1}^{p} \alpha_j\ \psi_j(x, y_j)$$

(†) Consider as an example : $X \triangleq R$, $Y \triangleq \{-1, 1\}$, $\psi(x, y) \triangleq (x^2 + y(x-1), x^2 - y(x-1))$. Thus $\varphi(x) = (x^2 + |x - 1|, x^2 + |x - 1|)$ and the only Pareto optimal element is $x^* = \frac{1}{2}$. But $\psi_1(x, y) + \psi_2(x, y) = 2x^2$ which attains its unique minimum at $\hat{x} = 0$.

then x^* is Pareto-optimal.

Proof :

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \sup_{y \in Y} \psi_j(x, y) = \sum_{j=1}^{p} \sup_{y_j \in Y} \alpha_j \psi_j(x, y_j)$$

$$= \sup_{y_1 \in Y, \ldots, y_j \in Y} \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \psi_j(x, y_j) \qquad \blacksquare$$

For a necessary scalarization condition to hold some convexity assumptions are needed. The following lemma indicates what kind of convexity must be met.

Lemma 3.1 : x^* in X is Pareto-optimal iff the following holds :

$$(\varphi(x^*) - R_+^p) \cap (\varphi(X) + R_+^p) = \{\varphi(x^*)\} . \tag{3.1}$$

Proof : Clearly x^* is Pareto-optimal iff

$$(\varphi(x^*) - R_+^p) \cap \varphi(X) = \{\varphi(x^*)\} \tag{3.2}$$

Obviously (3.1) implies (3.2). Conversely let ω be an element of the L.H.S. of (3.1) then, for some x in X, ω' and ω'' in R^p one has :

$$\omega = \varphi(x^*) - \omega' = \varphi(x) + \omega'' \qquad \bigcirc$$

thus $\varphi(x) = \varphi(x^*) - (\omega' + \omega'') \in \varphi(x^*) - R_+^p$ and the L.H.S. of (3.2) contains $\varphi(x)$.

Thus (3.2) implies $\varphi(x^*) = \varphi(x)$, $\omega' = \omega'' = 0$ and finally $\omega = \varphi(x^*)$, that is (3.1). $\blacksquare$

Remark 3.1 : If X is a convex subset of a linear space and each φ_j is convex on X, then $\varphi(X) + R_+^p$ is convex, (but φ_j quasi-convex is not sufficient)

Remark 3.2 : $\varphi(X) + R_+^p$ is convex iff :

$$\forall\, x, x' \in X, \ \forall \lambda \ [0, 1] \ \exists\, z \in X \ \text{ s.t.}$$

$$\varphi(z) \leq \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(x')$$

i.e. there exists a mapping $T : X \times X \times [0, 1] \to X$ such that :

$$\forall x, x' \in X, \ \forall \lambda \in [0, 1] \ \varphi(T(x, x', \lambda)) \leq \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(x').$$

Theorem 3.2 : If $\varphi(x) + R_+^p$ is convex and x^* is Pareto-optimal then there exist $\alpha_j \geq 0$ for all j and $\alpha_\ell > 0$ for some ℓ such that :

$$\forall x \in X \quad \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varphi_j(x^*) \leq \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varphi_j(x) .$$

Proof : Direct application of lemma 3.1 and the separation theorem. ⊡

Assumption 3.1 :

X is a convex subset of a Banach space U
Y is a compact space
$\psi : U \times Y \to R^p$ is continuous and convex in $x \in U$.
$x \to \psi'_x(x, y)$ is an equicontinuous family.

Then, we can prove the following theorem using results of Danskin [12] Dem'Yanov [13], and Lemaire [14].

Theorem 3.3 : Under assumption 3.1 :

(i) If $x^* \in X$ is Pareto-optimal then there exist $\alpha_j \geq 0$ for all j, $\alpha_\ell > 0$ for some ℓ such that :

$$\min_{x \in X} \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \max_{y \in Y_j(x^*)} < \psi'_{jx}(x^*, y), x - x^* > = 0 \qquad (3.3)$$

where $Y_j(x) \triangleq \{\bar{y} \in Y : \psi_j(x, \bar{y}) = \max_{y \in Y} \psi_j(x, y)\}$

(ii) Conversely, if there exist $\alpha_j > 0$ for each j such that (3.3) holds, then x^* is Pareto-optimal.

Proof : For each j, φ_j is directionally differentiable with (see Refs [12] - [14]) :

$$\varphi'_j(x ; h) = \max_{y \in Y_j(x)} < \psi'_{jx}(x, y), h >$$

Since :

$$\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varphi_j\right)'(x ; h) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varphi'_j(x ; h)$$

We can use theorem 2.4 of Dem'Yanov [13] and theorems 3.1 and 3.2 to get (i) and (ii). ⊡

It is clear that the scalarization approach is the simpler one, but to be applicable it requires convexity assumptions, even to get necessary conditions.

In the next section, we will develop necessary conditions for Pareto-optimality, which do not require convexity.

4. A LAGRANGE MULTIPLIER THEOREM

In this section, the results of Danskin [12] and Bram [15] will be used extensively.

Assumption 4.1 :

Y is a compact space

$\psi : R^n \times Y \to R^p$ is continuous and its derivative $\psi'_x(x, y)$ is continuous.

$X \subset R^n$ is defined by a set of constraints :

$$X = \{x \in R^n : g_i(x) \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, m\}$$

$g_i : R^n \to R$ is C^1, $i = 1, \ldots, m$.

Theorem 4.1 : Under Assumption 4.1, if x^* in X is Pareto-optimal and if the Kuhn - Tucker constraint qualification is satisfied at x^*, then there exist $\lambda_i \geq 0$ for $i = 1, \ldots, m$ and $\alpha_j \geq 0$ for $j = 1, \ldots, p$ $\alpha_\ell > 0$ for some ℓ, such that :

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \max_{y \in Y_j(x^*)} < \psi'_{jx}(x^*, y), h > \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i < g'_i(x^*), h > \qquad (4.1)$$

and $\lambda_k > 0 \Rightarrow g_k(x^*) = 0.$ (4.2)

Furthermore, if the g_i's are concave and the ψ_j's are convex in x then (4.1) with $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ and $\alpha_j > 0$, $j = 1, \ldots, p$ implies that x^* is Pareto-optimal.

Proof : Let $x^* \in X$ be a Pareto-optimal point. This means that for every $x \in X$

$$\left|\begin{array}{l} \text{either } \exists\, j \text{ s.t. } \varphi_j(x) > \varphi_j(x^*) \\ \text{or} \qquad \forall\, j \quad \varphi_j(x) = \varphi_j(x^*) \end{array}\right.$$

this implies that :

$$\forall x \in X \qquad \max_j [\varphi_j(x) - \varphi_j(x^*)] \geq 0 \qquad (4.3)$$

(Note that this is a necessary condition for Pareto-optimality, but it is a necessary and sufficient condition for weak Pareto-optimality).

Let Γ be the set of vectors admissible at x, that is the set of $h \in R^n$ such that there exist an arc issuing from x, and lying in X, with a tangent vector at x equal to h.

Thus (4.3) becomes :

$$\forall h \in \Gamma \quad \max_j \varphi'_j(x^*; h) \geq 0 \qquad (4.4)$$

Under the constraint qualification condition, one has :

$$\Gamma = \{h \in R^n : \langle g_i'(x^*), h \rangle \geq 0, \quad i \in I\}$$

where $I = \{i : g_i(x^*) = 0\}$.

Let $W_j \triangleq \psi'_{jx}(x^*, Y_j(x^*))$, then (4.3) becomes :

$$\max_{j=1,\ldots,p} \max_{W \in W_j} \langle w, h \rangle \geq 0 \qquad \forall h \in \Gamma$$

or

$$\max_{\substack{w \in \cup W_j \\ j=1,\ldots,p}} \langle w, h \rangle \geq 0 \qquad \forall h \in \Gamma$$

and, if W is the convex hull of $\bigcup_{j=1,\ldots,p} W_j$,

$$\max_{w \in W} \langle w, h \rangle \geq 0 \qquad \forall h \in \Gamma$$

Consider the cone $\Gamma^* \triangleq \{z \in R^n : \langle z, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \Gamma\}$ then following Bram's proof [15] it can be shown that $\Gamma^* \cap W$ is not empty.

Let $\hat{w} \in \Gamma^* \cap W$, then there exist $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$ such that :

$$\hat{w} = \sum_{i \in I} \lambda_i \, g_i'(x^*)$$

and there exist $w_j \in W_j$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, p$, $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1$

such that :

$$\hat{w} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \, w_j$$

therefore, setting $\lambda_i = 0$ if $i \notin I$ one has :

$$\forall h \in R^n \quad \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \max_{w_j \in W_j} \langle w_j, h \rangle$$

$$\geq \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \langle g_i(x^*), h \rangle$$

that is (4.1).

Let us remark that if each set W_j reduces to a single element, then each φ_j is differentiable at x^* and (4.1) yields the generalized Kuhn - Tucker result :

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \, \psi'_{jx}(x^*, Y_j(x^*)) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g'_i(x^*).$$

Finally, the proof of the sufficient condition is the same as in the classical case. ∎

5. CONCLUSION

The notion of Pareto-optimality has been extended to perturbed systems. The scalarization process and the extended Lagrange multiplier rule which have been obtained can be used to characterize and compute optimal decisions.

A promising field of application of these results is "n-player" game theory without side payments [16] ; the reader could verify that the boundary of the Auman's characteristic function for a given coalition corresponds to the set of all Pareto-optimal outcomes in an adequatly defined perturbed system.

REFERENCES

[1] A.W. STARR et Y.C. HO :
Nonzero-Sum Differential Games, JOTA, 3 (1969), 184-206.

[2] _____
Further Properties of Nonzero-Sum Differential Games, JOTA (1969), 207-219.

[3] T.L. VINCENT & G. LEITMANN :
Control Space Properties of cooperative games, JOTA, 4 (1970), 91-113.

[4] A. BLAQUIERE :
Sur la géométrie des surfaces de Pareto d'un jeu différentiel à N joueurs, C.R. Acad. Sc. Paris Sér. A, 271 (1970), 744-747.

[5] A. BLAQUIERE, L. JURICEK & K.E. WIESE :
Sur la géométrie des surfaces de Pareto d'un jeu différentiel à N joueurs; théorème du maximum, C.R. Acad. Sc. Paris Sér. A, 271 (1970), 1030-1032.

[6] A. HAURIE :
Jeux quantitatifs à M joueurs, doctoral dissertation, Paris 1970.

[7] M.C. DELFOUR & S.K. MITTER :
Reachability of Perturbed Linear Systems and Min Sup Problems, SIAM J. On control, 7 (1969), 521-533

[8] D.P. BERTSEKAS & I.B. RHODES :
On the Minimax Reachability of Targets and Target Tubes, Automatica, 7 (1971), 233-247.

[9] J.D. GLOVER & F.C. SCHWEPPE :
Control of Linear Dynamic Systems with Set Constrained Disturbances, IEEE Trans. on Control, AC-16 (1971), 411-423.

[10] A. HAURIE :
On Pareto Optimal Decisions for a Coalition of a Subset of Players, IEEE Trans. on Automatic Control, avril 1973.

[11] H.W. KUHN & A.W. TUCKER :
Non-Linear Programming, 2nd Berkeley Symposium of Mathematical Statistics and Probability, Univ. Calif. Press, Berkeley 1951.

[12] J. DANSKIN :
On the Theory of Min-Max, J.SIAM Appl. Math., Vol. 14 (1966), pp. 641-664.

[13] V.F. DEM'YANOV & A.M. RUBINOV :
Minimization of functionals in normed spaces, SIAM J. Control, Vol. 6 (1968), pp. 73-88.

[14] B. LEMAIRE :
Problèmes min-max et applications au contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles linéaires, Thèse de doctorat, faculté des sciences, Université de Paris, 1970.

[15] J. BRAM :
The Lagrange Multiplier Theorem for Max-Min with several Constraints, J. SIAM App. Math. Vol 14 (1966), pp 665-667.

[16] R.J. AUMANN :
A Survey of Cooperative Games without side Payments, in Essays in Mathematical Economics, ed. M. Shubik, Princeton 1969.

CHAPITRE 4: SUR L'APPLICATION DE LA SOLUTION COOPERATIVE DE NASH A UN JEU DIFFERENTIEL

Plan: 4.1 Les règles du jeu.

4.2 Solution coopérative de Nash.

4.3 Conditions nécessaires d'optimalité.

4.4 Limites à l'applicabilité de ce concept de solution.

4.5 Conclusion.

Introduction

Dans ce chapitre nous considérons un jeu différentiel à deux joueurs et à somme non nulle et nous tentons d'étendre à ce type de jeu le concept de solution coopérative proposé par Nash (1953).

Après avoir décrit les règles du jeu nous rappellerons la définition de la solution coopérative de Nash pour un jeu sous forme normale et nous l'appliquerons au jeu différentiel. Nous donnerons ensuite des conditions nécessaires d'optimalité. Enfin nous montrerons que ce concept de solution coopérative souffre de sérieuses limitations dans le cadre des jeux différentiels en particulier et des jeux sous forme extensive en général.

4.1. Les règles du jeu

Nous considérons un jeu différentiel défini par:

(i) les équations d'état:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x,u_1,u_2) \tag{4.1}$$

où:

$x \in X \subset E^n$ est la variable d'état,

$x \triangleq (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_n \triangleq t$,

X est un ensemble ouvert,

$u_j \in U_j \subset E^{r_j}$ est la variable de commande du joueur $j \in \{1,2\}$, r_j entier,

f est de classe C^1 sur $E^n \times E^{r_1} \times E^{r_2}$;

(ii) une cible $\theta \subset \partial X$;

(iii) les ensembles de stratégie $\mathcal{I}_j \subset \mathcal{F}_j$, $j \in \{1,2\}$ où: $\mathcal{F}_j$ est l'ensemble des applications de X dans U_j. Nous supposerons que les ensembles de stratégie $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ satisfont aux hypothèses classiques concernant la composition des stratégies (cf. Blaquière et Leitmann (1969) ou Blaquière (1970)).

Nous dirons que la fonction $\tilde{x} : t \to x = \tilde{x}(t)$, définie sur $[t_0,t_1]$ est une solution de (4.1) engendrée par le couple stratégique $s \triangleq (s_1,s_2) \in \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2$ si $\tilde{x}$ est continue et:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\tilde{x}(t) = f[x(t),s[x(t)]] \triangleq f[x(t),s_1[x(t)],s_2[x(t)]] \\ \text{presque partout sur } [t_0,t_1]. \end{array}\right\}$$

Le graphe $\pi \triangleq \{(t,x) : x = \tilde{x}(t),\ t \in [t_0,t_1]\}$ sera appelé un *chemin issu de* x^i, *engendré par* s, si $\tilde{x}$ est une solution de 4.1 engendrée par s et telle que:

$$\tilde{x}(t_i) = x^i.$$

Un chemin π est *complet* si $\tilde{x}(t_1) \in \theta$. Un couple stratégique s est *jouable* en x^i s'il engendre un chemin complet issu de x^i.

Nous noterons $J(x^i)$ l'ensemble des couples stratégiques jouables en x^i.

Soit:

$$f_{0j} : X \times U_1 \times U_2 \to R \quad j \in \{1,2\}$$

deux fonctionnelles de classe C^1 sur $E^n \times E^{r_1} \times E^{r_2}$. Nous supposerons que pour tout chemin π issu de x^i engendré par le couple stratégique $s \in \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2$ les intégrales définissant les coûts pour les deux joueurs:

$$V_j(x^i,s,\pi) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} f_{0j}[\tilde{x}(t),s[\tilde{x}(t)]]dt \quad j \in \{1,2\}$$

sont bien définies et nous noterons:

$$V_j(x^i,s,\theta) \quad j \in \{1,2\}, \quad \forall\, x^i \in X, \quad \forall\, s \in J(x^i)$$

les coûts le long d'un chemin complet issu de x^i engendré par s. Nous supposerons que:

$$V_j(x^i,s,\theta) = 0 \quad \forall\, x^i \in \theta, \quad \forall\, s \in \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2.$$

Pour les fins propres à ce chapitre nous ferons l'hypothèse simplificatrice que, pour tout x^i dans X et tout couple stratégique s jouable en x^i les ***coûts*** $V_j(x^i,s,\theta)$ *sont uniquement définis*. Ce n'est en général pas le cas puisqu'un même couple stratégique pourrait engendrer plusieurs chemins complets. Cette hypothèse n'est faite que pour simplifier l'exposition de nos principaux résultats qui concernent les "limites" du concept de solution coopérative de Nash.

4.2. Solution coopérative de Nash

En un état $x^i \in X$ les fonctionnelles de coût:

$$V_j(x^i,\cdot,\theta) : s \to V_j(x^i,s,\theta) \quad \forall\, s \in J(x^i), \quad j \in \{1,2\}$$

définissent un jeu sous forme normale à somme nulle pour les deux joueurs $j \in \{1,2\}$.

Soit $\bar{s} \triangleq (\bar{s}_1,\bar{s}_2) \in J(x^i)$ un couple stratégique représentant les *menaces* choisies par les deux joueurs et qu'ils utiliseront si une solution coopérative n'est pas retenue.

Posons:

$$\phi_j(x^i) \triangleq V_j(x^i,\bar{s},\theta) \quad j \in \{1,2\}.$$

Définition 4.1: Etant donné le couple stratégique de menaces $\bar{s}$, un couple stratégique $s^* \triangleq (s_1^*,s_2^*)$ est une *solution coopérative de Nash en* x^i si:

(i) $s^* \in J(x^i)$ est Paréto-optimale;

(ii) si on définit:

$$\forall\, s \in J(x^i), \quad J(x^i,s) \triangleq (V_1(x^i,s,\theta)-\phi_1(x^i))(V_2(x^i,s,\theta)-\phi_2(x^i))$$

alors on a:

$$\forall\, s \in J(x^i), \quad V_j(x^i,s,\theta) < \phi_j(x^i), \quad j = 1,2$$
$$\Rightarrow J(x^i,s^*) \geq J(x^i,s). \qquad \blacksquare$$

Cette définition est la simple transposition au contexte du jeu différentiel, considéré en l'état x^i seulement, de la solution proposée par Nash pour un jeu sous forme normale et justifiée par une axiomatique que l'on pourrait trouver dans Owen (1968). Nous utiliserons aussi la notion plus restrictive suivante:

Définition 4.2: Etant donné le couple stratégique de menaces $\bar{s}$ jouable sur X, le couple stratégique s* est une *solution coopérative de Nash sur* X si s* est une solution coopérative de Nash en tout point x^i de X. ■

4.3. Conditions nécessaires d'optimalité

Nous dirons dorénavant que s* est *Nash-optimal* en x^i si s* est une solution coopérative de Nash en x^i. Nous ferons en outre les hypothèses suivantes:

Hypothèse 4.1: Etant donné le couple stratégique de menaces $\bar{s}$ il existe un couple stratégique s* Nash-optimal en x^i. ■

Soit π^* un chemin complet issu de x^i, engendré par s* et représenté par la fonction:

$$\tilde{x}^* : [t_i, t_f] \to X \cup \theta$$

$$\tilde{x}^*(t_f) \in \theta.$$

Hypothèse 4.2: $\forall\ t \in [t_i, t_f)$ il existe un voisinage $\mathcal{B}[\tilde{x}^*(t)]$ de $\tilde{x}^*(t)$ dans X tel que:

$$\forall\ x \in \mathcal{B}[\tilde{x}^*(t)] \quad s^* \in J(x).$$ ■

Nous pouvons alors considérer l'ouvert:

$$\mathcal{B} = \bigcup_{t \in [t_i, t_f)} \mathcal{B}[\tilde{x}^*(t)]$$

et définir les fonctions:

$$V_j^* : \mathcal{B} \to R \quad j \in \{1,2\}$$

par:

$$V_j^*(x) = V_j(x, s^*, \theta) \quad \forall\ x \in \mathcal{B}.$$

Hypothèse 4.3: V_j^* est de classe C^1 sur $\mathcal{B}$ pour $j \in \{1,2\}$. ■

Hypothèse 4.4: Les stratégies $s_j \in \mathcal{I}_j$, $j \in \{1,2\}$ doivent satisfaire aux contraintes:

$$\forall\, x \in X \quad s_j(x) \in K_j(x) \subset U_j$$

et les ensembles $\mathcal{I}_j$ sont tels que:

$$\forall\, \tilde{x}^*(t), \quad \forall\, u_j \in K_j[\tilde{x}^*(t)], \quad \exists\, s_j \in \mathcal{I}_j,$$

de classe C^1 sur $\mathcal{B}[\tilde{x}^*(t)]$ et telle que $s_j[\tilde{x}^*(t)] = u_j$, $j \in \{1,2\}$. ■

Théorème 4.1: Sous les hypothèses 4.1 à 4.4, si nous définissons:

$$\lambda_{0\ell} \triangleq V_j^*(x^i) - \phi_j(x^i) \quad \ell,j \in \{1,2\}, \quad \ell \neq j$$

alors, presque partout sur $[t_i,t_f]$ on aura:

$$\forall\, u_1 \in K_1[\tilde{x}^*(t)], \quad \forall\, u_2 \in K_2[\tilde{x}^*(t)]$$

$$\lambda_{01}\left[f_{01}[\tilde{x}^*(t),s^*[\tilde{x}^*(t)]] + \frac{\partial V_1^*}{\partial x}[\tilde{x}^*(t)] \cdot f[\tilde{x}^*(t),s^*[\tilde{x}^*(t)]]\right]$$

$$+ \lambda_{02}\left[f_{02}[\tilde{x}^*(t),s^*[\tilde{x}^*(t)]] + \frac{\partial V_2^*}{\partial x}[\tilde{x}^*(t)] \cdot f[\tilde{x}^*(t),s^*[\tilde{x}^*(t)]]\right]$$

$$\geq \lambda_{01}\left[f_{01}[\tilde{x}^*(t),u_1,u_2] + \frac{\partial V_1^*}{\partial x}[\tilde{x}^*(t)] \cdot f[\tilde{x}^*(t),u_1,u_2]\right]$$

$$+ \lambda_{02}\left[f_{02}[\tilde{x}^*(t),u_1,u_2] + \frac{\partial V_2^*}{\partial x}[\tilde{x}^*(t)] \cdot f[\tilde{x}^*(t),u_1,u_2]\right]. \qquad (4.1)$$

Démonstration: Considérons l'espace augmenté E^{n+2}, la variable:

$$z \triangleq (x_{01},x_{02},x) \in \bar{X} \triangleq E^2 \times X$$

et les équations d'état augmentées:

$$\dot{z} = F(z,u) \qquad u \in U_1 \times U_2$$

où:

$$F(z,u) \triangleq (f_{01}(x,u), f_{02}(x,u), f(x,u)).$$

Une solution de (4.2) engendré par le couple stratégique s en z^i sera une fonction $\tilde{z} : [t_i,t_1] \to \bar{X}$ continue et vérifiant presque partout sur $[t_0,t_1]$:

$$\frac{d}{dt}\tilde{z}(t) = F[\tilde{z}(t), s[\tilde{z}(t)]]$$

où nous posons: $s[\tilde{z}(t)] \equiv s[\tilde{x}(t)]$ si $\tilde{z}(t) = (\tilde{x}_{01}(t), \tilde{x}_{02}(t), \tilde{x}(t))$ cependant que:

$$\forall\, t \in [t_i,t_1) \qquad \tilde{z}(t) \in \bar{X}$$

et:

$$\tilde{z}(t_i) = z^i.$$

Nous appellerons *trajectoire* Π issue de z^i et engendrée par s le graphe $\{(t,z) : z = \tilde{z}(t), t \in [t_0,t_1]\}$

En particulier, au chemin complet π^* issu de x^i engendré par s^* correspond une trajectoire Π^* issue de $z^i \triangleq (0,0,x^i)$, représentée par $\tilde{z}^* : [t_i,t_f] \to \bar{X} \cup \bar{\theta}$, $\tilde{z}^*(t_f) \in \bar{\theta}$ où:

$$\bar{\theta} \triangleq E^2 \times \theta.$$

Considérons alors le nombre réel:

$$C^* = J(x^i,s^*) \triangleq (V_1^*(x^i) - \phi_1(x^i))(V_2^*(x^i) - \phi_2(x^i))$$

et définissons la surface:

$$\Sigma(C^*) \triangleq \{z \in E^{n+2} : x \in \mathcal{B} \text{ et } \Phi(z) \triangleq (x_{01}+V_1^*(x)-\phi_1(x^i))(x_{02}+V_2^*(x)-\phi_2(x^i))=C^*\}$$

ainsi que la région:

$$A/\Sigma(C^*) \triangleq \{z \in E^{n+2} : x \in \mathcal{B} \text{ et } \Phi(z) > C^*\}.$$

On peut vérifier immédiatement que l'on a:

$$\Pi^* \subset \Sigma(C^*). \tag{4.2}$$

D'autre part, soit $\tilde{z}^*(t) \in \Pi^*$ et Π^k une trajectoire issue de $\tilde{z}^*(t)$, alors on vérifiera tout aussi facilement que l'on a:

$$\Pi^k \cap A/\Sigma(C^*) = \emptyset \tag{4.3}$$

du fait de l'optimalité de Π^*.

Une normale en $\tilde{z}^*(t)$ à $\Sigma(C^*)$ est définie par:

$$\Lambda(t) = \frac{\partial}{\partial z}\phi(z)\Big|_{z=\tilde{z}^*(t)}$$

c'est-à-dire:

$$\Lambda(t) = \lambda_{01}(1,0,\lambda_1(t)) + \lambda_{02}(0,1,\lambda_2(t)) \tag{4.4}$$

avec:

$$\lambda_{01} \triangleq (x_{02}+V_2^*(x)-\phi_2(x^i))\Big|_{z=\tilde{z}^*(t)} = V_2^*(x^i) - \phi_2(x^i)$$

$$\lambda_{02} \triangleq (x_{01}+V_1^*(x)-\phi_1(x^i))\Big|_{z+\tilde{z}^*(t)} = V_1^*(x^i) - \phi_1(x^i)$$

$$\lambda_j(t) \triangleq \frac{\partial V_j^*}{\partial x}(\tilde{x}^*(t)) \quad j \in \{1,2\}.$$

Pour $u \triangleq (u_1,u_2) \in K[\tilde{x}^*(t)] \triangleq K_1[\tilde{x}^*(t)] \times K_2[\tilde{x}^*(t)]$ donné construisons un couple stratégique s de classe C^1 sur le voisinage $\mathcal{B}[\tilde{x}^*(t)]$ et tel que:

$$s[\tilde{x}^*(t)] = u.$$

Ce couple stratégique engendre une trajectoire Π^k issue de $\tilde{z}^*(t)$. De (4.2) et (4.3) on déduit alors que l'on a nécessairement:

$$\langle \Lambda(t), F[\tilde{z}^*(t), s^*[\tilde{z}^*(t)]] \rangle = 0$$

$$\langle \Lambda(t), F[\tilde{z}^*(t), u_1, u_2] \rangle \leq 0.$$

De l'expression de $\Lambda(t)$, donnée en (4.4) et de celle de $F(\cdot)$ on déduit (4.1). ■

Nous pourrions affiner ce résultat et le compléter d'une façon très analogue à celle adoptée par Blaquière, Juricek et Wiese (1970) dans le cas de Paréto-optimalité, pour obtenir un principe du maximum caractérisant un couple stratégique *Nash-optimal*. Nous ne le ferons pas car le Théorème 4.1 suffit déjà à montrer que la solution coopérative de Nash est difficilement acceptable dans le cas d'un jeu différentiel.

4.4. Limites à l'applicabilité de ce concept de solution

Dans cette section nous montrerons qu'en général un couple stratégique Nash-optimal en x^i engendrant le chemin complet π^* issu de x^i ne sera pas Nash-optimal en tout point de π^* ce qui voudra dire que pour la plupart des jeux différentiels la notion de couple stratégique *Nash-optimal sur* X est inapplicable.

Théorème 4.2: Si s^* est un couple stratégique Nash-optimal en x^i, engendrant le chemin π^*, tel que les hypothèses 4.1 à 4.4 soient vérifiées, et si s^* est Nash-optimal en tout point $\tilde{x}^*(t) \in \pi^*$ alors on aura pour presque tout $t \in [t_0, t_f]$:

$$\forall\ \tau \in [t_i,t),\quad \forall\ u \in K[\tilde{x}^*(t)]$$

$$\lambda_{01}(\tau)\psi_1[\tilde{x}^*(t),s^*[\tilde{x}^*(t)]] + \lambda_{02}(\tau)\psi_2[\tilde{x}^*(t),s^*[\tilde{x}^*(t)]]$$

$$\geq \lambda_{01}(\tau)\psi_1[\tilde{x}^*(t),u] + \lambda_{02}(\tau)\psi_2[\tilde{x}^*(t),u] \qquad (4.5)$$

où on a posé:

$$\lambda_{0\ell}(\tau) \triangleq V_j^*[\tilde{x}^*(\tau)] - \phi_j[\tilde{x}^*(\tau)] \quad \ell,j \in \{1,2\} \quad \ell \neq j$$

$$\phi_j[\tilde{x}^*(\tau)] \triangleq V_j[\tilde{x}^*(\tau),\bar{s},\theta]$$

$$\psi_j[\tilde{x}^*(t),u] \triangleq f_{0j}[\tilde{x}^*(t),u] + \frac{\partial V_j^*}{\partial x}[\tilde{x}^*(t)] \cdot f[\tilde{x}^*(t),u]. \qquad (4.6)$$

Démonstration: Soit $t \in [t_i,t_f]$, le couple stratégique s^* étant Nash-optimal en tout point:

$$\tilde{x}^*(\tau),\quad \forall\ \tau \in [t_i,t)$$

le théorème 4.1 peut s'appliquer chaque fois que l'on considère $\tilde{x}^*(\tau)$ comme l'état initial, ce qui entraine (4.5) et (4.6). ■

Les conséquences de ce théorème sont destructrices et, cependant, fort intuitives. En effet comme on aura en général:

$$\tau \neq \tau' \Rightarrow \lambda_{0j}(\tau) \neq \lambda_{0j}(\tau')$$

les relations (4.5) et (4.6) ne seront vérifiées que pour des cas très particuliers ce qui veut dire qu'en général s^* ne sera Nash-optimal qu'au point x^i. Les raisons pour cela sont très intuitives puisque la solution coopérative de Nash en x^i est basée sur le coût

$$(\phi_j(x^i))_{j\in\{1,2\}}$$

résultant des stratégies de menace $(\bar{s}_j)_{j\in\{1,2\}}$. En $\tilde{x}^*(t)$ les coûts associés aux stratégies de menace seront fort différents et impliqueront, en général, une solution coopérative de Nash différente.

D'un point de vue pratique cela veut dire que la solution coopérative de Nash n'est applicable que dans le cas où, en x^i, les deux joueurs choisissent leur stratégies respectives et se conforment à ce choix pour le reste du jeu. Cela revient effectivement au cas où les joueurs jouent suivant le jeu sous forme normale défini en x^i. En réalité la forme même des stratégies, conçues comme des "contrôles en boucle fermée", permet aux joueurs de réviser leurs choix stratégiques en cours de partie.

L'exemple suivant illustre ces faiblesses.

Exemple 4.1: Soit le jeu différentiel défini par:

$$\dot{x}_i = u_{1i} + u_{2i} \quad i = 1,2$$

$$\dot{x}_3 = 1$$

$$x \in E^3, \quad x_3 \triangleq t \in [0,2], \quad u_j \triangleq (u_{ji})_{i\in\{1,2\}} \in E^2, \quad j \in \{1,2\}.$$

Considérons les contraintes suivantes:

$$K_j(x) \triangleq \{u_j \in E^2 : \|u_j\| < \alpha_j(t)\}, \ \alpha_j(t) > 0, \quad \forall\, t \in [0,2], \quad \forall\, j \in \{1,2\}.$$

et, finalement considérons les fonctionnelles de coût définis par:

$$f_{0j}(x,u) \triangleq \langle z_j, u \rangle$$

où z_j est un vecteur donné, de norme unité dans E^2, $j \in \{1,2\}$.

Nous ferons en outre les hypothèses suivantes:

$$\alpha \triangleq \int_0^2 \alpha_1(t)dt = \int_0^2 \alpha_2(t)dt$$

$$\langle z_1, z_2 \rangle = 0$$

et nous définirons la cible θ par:

$$\theta \triangleq \{x \in E^3 : x_3 = t = 2\}.$$

Soit x^0 un état initial en $t = 0$. Les stratégies de menace des deux joueurs seront supposées être les suivantes:

$$\forall\, x \quad \bar{s}_j(x) = -\alpha_j(t) z_j \quad \forall\, j \in \{1,2\}.$$

Il serait facile de vérifier que le couple stratégique $\bar{s}$ est un équilibre non coopératif en tout point:

$$x \in X \triangleq \{x \in E^3 : x_3 \in [0,2)\}$$

et que, de plus, chaque stratégie $\bar{s}_j$ est une stratégie de type "Min-Max" pour le joueur j sur X. Le choix de $\bar{s}$ comme couple stratégique de menace est donc raisonnable. Dans ces conditions on a:

$$\phi_j(x^0) = -\bar{\alpha} \triangleq -\int_0^2 \alpha_j(t)dt \quad \forall\, j \in \{1,2\}.$$

L'ensemble des coûts possibles le long de tous les chemins issus de x^0 et engendrés par des stratégies admissibles est le cercle:

$$P(x^0) \triangleq \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in R^2 : \|\omega\| \leq 2\bar{\alpha}\}.$$

Dans ces conditions une stratégie *Nash-optimal* en x^0 devra nécessairement être telle que:

$$V_1^*(x^0) - \phi_1(x^0) = V_2^*(x^0) - \phi_2(x^0)$$

et être Paréto-optimale. On en déduit alors que les stratégies:

$$s_j^*(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(z_1+z_2)\alpha_j(t), \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, j \in \{1,2\}$$

définissent un couple Nash-optimal tel que:

$$V_j^*(x^0) = -\sqrt{2}\,\bar{\alpha}$$

et engendrent le chemin $\tilde{x}^* : [0,t_2] \to X \cup \theta$ défini par:

$$\tilde{x}^*(t) = x^0 - \sqrt{2}(z_1+z_2)(\bar{\alpha}_1(t)+\bar{\alpha}_2(t))$$

où on a posé:

$$\bar{\alpha}_j(t) = \int_0^t \alpha_j(\tau)d\tau.$$

Considérons maintenant la situation en $\tilde{x}^*(1)$. En ce point on aura pour le joueur 1 un *coût garanti*:

$$\bar{V}_1(x^*(1)) = -\alpha_1^{12} + \alpha_2^{12}$$

où on a posé:

$$\alpha_j^{12} \triangleq \int_1^2 \alpha_j(t)dt;$$

ce coût sera garanti par l'utilisation de la stratégie de menace $\bar{s}$, quelle que soit l'action du joueur 2. Le couple stratégique s*, par contre, définit un "coût à venir":

$$V_1^*(\tilde{x}^*(1)) = -\sqrt{2}(\alpha_1^{12}+\alpha_2^{12})$$

on a donc:

$$V_1^*(\tilde{x}^*(1)) - \bar{V}_1(\tilde{x}^*(1)) = \alpha_1^{12}(1-\sqrt{2}) - \alpha_2^{12}(1+\sqrt{2})$$

et on constate que si on a:

$$\alpha_1^{12} > \alpha_2^{12} \quad \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

alors il est avantageux pour le joueur 1 de ne pas jouer suivant s_1^* mais plutôt suivant $\bar{s}_1$ à partir de t=1. Ainsi, non seulement s* ne sera pas *Nash-optimal* en $\tilde{x}^*(t)$, mais de plus le joueur 1 agirait de façon irrationnelle s'il gardait s_1^* pour t > 1.

4.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons mis en évidence la difficulté que pose l'extension au contexte des jeux différentiels du concept de solution coopérative de Nash.

Des difficultés analogues surviendraient dans le contexte des jeux multi-étages ou, plus généralement, des jeux définis sous forme extensives. Les limites à l'applicabilité du concept de solution coopérative de Nash sont de même nature que celles concernant la notion de coeur du jeu et discutées au Chapitre 2. Cependant, alors que la notion de C-optimalité permettait d'étendre au cadre dynamique des jeux multi-étages une notion d'optimalité coopérative définissant le super-coeur, dans le cas de la solution coopérative de Nash il ne semble pas y avoir de moyen simple d'adapter ce concept de façon à ce qu'il ait un sens dans un contexte dynamique.

ANNEXE 4.1

A NOTE ON NONZERO-SUM DIFFERENTIAL GAMES WITH BARGAINING SOLUTION

A paraître

"JOURNAL OF OPTIMIZATION THEORY AND APPLICATIONS"

A NOTE ON NONZERO-SUM DIFFERENTIAL GAMES WITH BARGAINING SOLUTION *

A. HAURIE **

Abstract : The extension of Nash's bargaining solution to differential games is discussed. It is shown that a closed-loop solution verifies very stringent necessary conditions and that an open-loop solution can present serious weakness from a normative point of view.

---

* This research has been supported by the Canada Council (S73-0935) and the Ministère de l'éducation du Québec (D.G.E.S.)

** Professor, Ecole des Hautes Etudes Commerciales, 5255 Decelles, MONTREAL 250, Tél.: 343-4370.

1. Introduction.

Recently, Liu [1] proposed an extension to differential games of the Nash's bargaining solution and gave a sufficient condition for a closed-loop strategy to be optimal on a region X of the state space.

In this paper it is shown that the direct extension of the Nash's bargaining solution at the initial state x^o may present serious weakness in the sense that the agreement between both players, necessary to play a cooperative game, can be unstable ; it is also shown that a Nash's bargaining solution must satisfy the well known Pareto-necessary conditions with weights depending on the initial state x^o. Thus a closed-loop solution valid on a region X can be used only for very peculiar differential games : it is shown that, in general, a linear-quadratic two-person-non zero- sum game cannot have such a solution and, finally, it is verified on the example given by Liu that, of course, this particular game presents great singularities.

2. Nash's bargaining solution for games in normal form.

A two-player-non zero-sum game in normal form is given by the sets of strategies S_j , $j = 1 , 2$, and the criteria $V_j : S_1 \times S_2 \to R$ of each player.

In [2] , J. Nash considered the bargaining problem and proposed a formal negociation model in four stages :

Stage one : Each player j chooses a threat stragegy $\bar{s}_j \in S_j$ which he will be forced to use if no agreement is achieved.

Stage two : The players inform each other of their threats.

Stage three : Each player j decides independently upon his demand d_j.

Stage four : An agreement is possible only if there exists a strategy pair $(s_1 , s_2) \in S_1 \times S_2$ such that :

$$V_j(s_1 , s_2) \geq d_j \qquad j = 1 , 2$$

and thus the pay-off to each player is d_j ; otherwise the demands cannot be simultaneously satisfied and the threats must be executed.

This author provided also an axiomatic approach and came to the normative conclusion that, given the threat pair $(\bar{s}_1 , \bar{s}_2)$, the unique demand pair (d_1^* , d_2^*) which satisfies the axioms is such that :

$$(d_1^* - \bar{v}_1).(d_2^* - \bar{v}_2) = \max_{\substack{s_1 \in S_1 \\ s_2 \in S_2}} (V_1(s_1 , s_2)-\bar{v}_1).(V_2(s_1 , s_2)-\bar{v}_2) \qquad (1)$$

where :

$$\bar{v}_j \triangleq V_j(\bar{s}_1 , \bar{s}_2) \qquad j = 1 , 2.$$

The following remarks will have important consequences.

Remark 2.1 :

A strategy pair $s^* \triangleq (s_1^* , s_2^*)$ such that :

$$d_j^* = V_j(s_1^* , s_2^*) \triangleq v_j^*$$

is Pareto optimal.

Remark 2.2 :

As a possible threat, each player j may consider a Max Min strategy $\hat{s}_j$. However, if the agreement is not reached, the outcome for player j is :

$$V_j(\hat{s}_1 , \hat{s}_2) \geq \max_{s_j \in S_j} \min_{s_k \in S_k} V_j \qquad k \neq j, \; j = 1,2$$

In fact there is no natural reason for player j to choose $\hat{s}_j$ as his threat and, generally, the choice of a threat is an essential part of the bargaining problem.

3. Extensions of this solution concept to a class of games in extensive form.

Differential or multi-stage games constitute a subclass of the category of games in extensive form.

We shall restrict our attention to a differential game defined by :

(a) the state equations :

$$\dot{x} = f(x , u_1 , u_2) \qquad (2)$$

$$x \in X \subset E^n , \; u_j \in U_j \subset E^{rj} , \; x_n = t \in [0 , \infty)$$

(b) the target : $\theta \in \partial X$

(c) the strategy sets : $S_j \subset \Sigma_j , \quad j = 1 , 2$

where Σ_j is the class of all mappings from X into U_j.

A stragegy pair $s \triangleq (s_1 , s_2) \in S_1 \times S_2$ is playable at x^o if it generates a terminating path $\tilde{x} : [t_o , t_f] \to X$ solution of (3.2) and such that $\tilde{x}(t_o) = x^o$, $\tilde{x}(t) \in X - \theta \;\; \forall \; t \in [t_o , t_f)$, $\tilde{x}(t_f) \in \theta$.

One assumes that the strategy sets are such that, along a trajectory generated by a playable strategy pair the pay-offs are given by :

$$V_j(x^o , s , \theta , \tilde{x}) \triangleq \int_{t_o}^{t_f} h_j(\tilde{x}(t) , s(\tilde{x}(t))) \, dt \qquad (3)$$

$j = 1, 2$

where $h_j : X \times U_1 \times U_2 \to R$ are given functions. To avoid unnecessary difficulties it is assumed that, given a playable strategy pair s the pay-offs do not depend on the trajectory generated and can be written.

$$V_j(x^o , s , \theta) \quad j = 1 , 2 \qquad (4)$$

and that any strategy pair in $S_1 \times S_2$, is playable everywhere on X.

This last assumption could be quite stringent as pointed out by Leitmann and Rocklin [3], however this does not weaken the validity of the arguments developed in this note.

Now, given an initial state x^o, (3.3) defines a game in normal form.

Let $\bar{s} \triangleq (\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ be a strategy pair representing the threats of each player. Define :

$$\varphi_j(x) \triangleq V_j(x , \bar{s} , \theta) , \quad j = 1, 2 , \qquad \forall \; x \in X$$

At x^o, the Nash's bargaining solution calls for the maximizing of :

$$J(x^o , s) \triangleq (V_1(x^o , s , \theta) - \varphi_1(x^o)) \cdot (V_2(x^o , s , \theta) - \varphi_2(x^o)) \qquad (5)$$

Let s* denote this solution.

The main purpose of this note is to show that the direct extension of the Nash's bargaining solution to the game (2), (3), reduced to the normal form (4), is not very satisfactory because of the two reasons cited below.

(i) Consider the terminating path $\tilde{x}^*$ generated by s^* and the bargaining problem at $\tilde{x}^*(t)$, $t \in (t_o , t_f]$. The solution of this bargaining problem would call for the maximizing of :

$$J'(\tilde{x}^*(t) , s) \triangleq (V_1(\tilde{x}^*(t) , s , \theta) - \varphi_1(\tilde{x}^*(t))).$$
$$(V_2(\tilde{x}^*(t) , s , \theta) - \varphi_2(\tilde{x}^*(t))) \qquad (6)$$

If s^* is not a solution of this problem, there is an instability in this solution concept since the reopening of negociations at an intermediate point of the trajectory generated would change the solution. The difficulty is then due to the non-Markov nature of the problem.

(ii) Each player may consider the possibility of departing from the cooperative behaviour at some time $t \in [t_o , t_f]$ and thus obtaining the pay-off :

$$W_j(t) \triangleq \int_{t_o}^{t} h_j(\tilde{x}^*(t) , s^*(\tilde{x}^*(t)) \, dt + \varphi_j(\tilde{x}^*(t))dt \qquad (7)$$

If, for some $t \in (t_o , t_f)$, the following inequality is satisfied :

$$W_j(t) > \int_{t_o}^{t_f} h_j(\tilde{x}^*(t),\ s^*(\tilde{x}^*(t)))\ dt \qquad (8)$$

then there is another instability of the Nash's bargaining solution.

Remark 3.1 :

For a bargaining solution s^* to be stable in the differential game (2) - (3) it is necessary to have, for each player j :

$$\forall\ t \in [t_o\ ,\ t_f] \quad \varphi_j(\tilde{x}^*(t)) \leq \int_{t}^{t_f} h_j(\tilde{x}^*(t),\ s^*(\tilde{x}^*(t)))\ dt \qquad (9)$$

This inequality is obviously verified for $t = t_o$, as a consequence of the maximization of (5) by s^*. If s^* is the solution of the bargaining problem at every state $\tilde{x}^*(t)$, $t \in [t_o\ ,\ t_f)$ then (9) is also satisfied everywhere on $[t_o\ ,\ t_f)$; otherwise one has to verify, after the computation of s^*, that (9) is satisfied. In fact it is not possible to consider (9) as a constraint ; it is only a condition of acceptability of the Nash's bargaining solution.

It appears that the difficulties encountered in applying Nash's bargaining solution to an extensive game are deeply linked to the possibility for s^* to be the solution of the bargaining problem only at x^o. The following results show that this is not unlikely.

Proposition 3.1 :

Define the weighting :

$$\lambda_{o1} = V_2^*(x^o) - \varphi_2(x^o)$$
$$\lambda_{o2} = V_1^*(x^o) - \varphi_1(x^o) \qquad (10)$$

where $V_j^*(x) \triangleq V_j(x , s^* , \theta) \quad \forall x \in X ; \quad j = 1 , 2$

Assume that each V_j^* is C^1 in X, thus, if s^* is the solution of the bargaining problem at x^o the following inequality must be verified almost everywhere on $[t_o , t_f]$, $\forall u_1 \in U_1$, $\forall u_2 \in U_2$:

$$\lambda_{o1}\left[h_1(\tilde{x}^*(t), s^*(\tilde{x}^*(t))) + \frac{\partial V_1^*}{\partial x}(\tilde{x}^*(t))).\ f(\tilde{x}^*(t), s^*(\tilde{x}^*(t)))\right]$$

$$+ \lambda_{o2}\left[h_2(\tilde{x}^*(t)), s^*(\tilde{x}^*(t)))+ \frac{\partial V_2^*}{\partial x}(\tilde{x}^*(t)) \ .\ f(\tilde{x}^*(t), s^*(\tilde{x}^*(t)))\right]$$

$$\geq \lambda_{o1}\left[h_1(\tilde{x}^*(t), u_1 , u_2) + \frac{\partial V_1^*}{\partial x}(\tilde{x}^*(t)) \cdot f(\tilde{x}^*(t), u_1 , u_2)\right]$$

$$+ \lambda_{o2}\left[h_2(\tilde{x}^*(t), u_1 , u_2) + \frac{\partial V_2^*}{\partial x}(\tilde{x}^*(t)) \cdot f(\tilde{x}^*(t), u_1 , u_2)\right]$$

(11)

Proof :

Consider in the augmented space E^{n+2} , the variable $z \triangleq (x_{o1} , x_{o2} , x) \in E^{n+2}$ and the augmented state equation :

$$\dot{z} = F(z , u) \qquad u \in U_1 \times U_2 \qquad (12)$$

where $F(z , u) \triangleq (h_1(x , u), h_2(x , u), f(x , u))$

An admissible trajectory in E^{n+2}, emanating from $z^o \triangleq (0 , 0 , x^o)$ is a solution $\tilde{z} : [t_o , t_i] \to E^{n+2}$ generated by an admissible control $\tilde{u} : [t_o , t_i] \to U_1 \times U_2$ and such that :

$$\forall\, t \in [t_o , t_i) \quad \tilde{z}(t) \in E^2 \times (X - \theta) , \quad z(t_o) = z^o$$

Consider now the real number

$$C^* \triangleq J(x^o , s^*) = (V_1^*(x^o) - \varphi_1(x^o)) . (V_2^*(x^o) - \varphi_2(x^o))$$

the surface $\Sigma(C^*)$ defined in E^{n+2} by :

$$\Sigma(C^*) \triangleq \{z \triangleq (x_{o1} , x_{o2} , x) : x \in X \text{ and },$$

$$(x_{o1} + V_1^*(x) - \varphi_1(x^o)) \times (x_{o2} + V_2^*(x) - \varphi_2^*(x^o)) = C^*\}$$

and the region :

$$A/\Sigma(C^*) \triangleq \{z : x \in X \text{ and },$$

$$(x_{o1} + V_1^*(x) - \varphi_1(x^o)) \times (x_{o2} + V_2^*(x) - \varphi_2(x^o)) > C^*\}$$

It is easily verified that the surface $\Sigma(C^*)$ has the following global properties :

If $\tilde{z}^* : [t_o , t_f] \to E^{n+2}$ is the trajectory emanating from z^o, generated by :

$$\tilde{u}^* : t \to s^*(\tilde{x}^*(t)) , t \in [t_o , t_f) , \text{ then :}$$

$$\forall t \in [t_o , t_f], \tilde{z}^*(t) \in \Sigma(C^*) \qquad (13)$$

If $\tilde{z}$ is an admissible trajectory emanating from z^o then :

$$\forall t \in [t_o , t_i], \tilde{z}(t) \notin A/\Sigma(C^*) \qquad (14)$$

Thus $\Sigma(C^*)$ has the characteristic properties of a limiting surface, although its definition is different. ([3]-[4]).

At every point $\tilde{z}^*(t)$, $t \in [t_o , t_f)$ the normal to $\Sigma(C^*)$ at $\tilde{z}^*(t)$ is given by the gradient :

$$\Lambda(t) \triangleq \frac{\partial}{\partial z} \left[(x_{o1} + V_1^*(x) - \varphi_1(x^o)) . (x_{o2} + V_2^*(x) - \varphi_2(x^o)) \right] \Big|_{z = \tilde{z}^*(t)}$$

that is :

$$\Lambda(t) = \lambda_{o1}(1 , o , \lambda_1(t)) + \lambda_{o2}(o , 1 , \lambda_2(t)) \qquad (15)$$

with :

$$\lambda_{o1} \triangleq \left[x_{o2} + V_2^*(x) - \varphi_2(x^o) \right] \Big|_{z = \tilde{z}^*(t)} = V_2^*(x^o) - \varphi_2(x^o) \qquad (16)$$

$$\lambda_{o2} \triangleq \left[x_{o1} + V_1^*(x) - \varphi_1(x^o) \right] \Big|_{z = \tilde{z}^*(t)} = V_1^*(x^o) - \varphi_1(x^o) \quad (17)$$

$$\lambda_j(t) = \frac{\partial V_j^*}{\partial x}(\tilde{x}^*(t)) \qquad j = 1 , 2 \qquad (18)$$

the relation (11) is then a consequence of (15) - (18) and of the local properties of the surface $\Sigma(C^*)$, in a neighborhood of the trajectory $\tilde{z}^*$, implied by the global properties (13) , (14). (cf. Refs [4]-[5]).

Corollary 3.1 :

Let s^* be a strategy pair generating the terminating path $\tilde{x}^* : [t_o , t_f] \to X$ such that s^* is a solution of the Bargaining Problem at every point $\tilde{x}^*(t)$, $t \in [t_o , t_f)$. Under the assumptions of Theorem 3.1., if one defines :

$$\lambda_{o1}(t) \triangleq V_2^*(\tilde{x}^*(t)) - \varphi_2(\tilde{x}^*(t))$$

$$\lambda_{o2}(t) \triangleq V_1^*(\tilde{x}^*(t)) - \varphi_1(\tilde{x}^*(t))$$

then the following inequality holds for each $\tau \in [t_o, t_f]$, almost each $t \in [t, t_f]$ and $\forall\, u \in U_1 \times U_2$

$$\lambda_{o1}(\tau) \left[h_1(\tilde{x}^*(t) , s^*(\tilde{x}^*(t))) + \frac{\partial V_1^*}{\partial x}(\tilde{x}^*(t)) \cdot f(\tilde{x}^*(t), s^*(\tilde{x}^*(t))) \right]$$

$$+ \lambda_{o2}(\tau) \left[h_2(\tilde{x}^*(t) , s^*(\tilde{x}^*(t))) + \frac{\partial V_2^*}{\partial x}(\tilde{x}^*(t)) \cdot f(\tilde{x}^*(t), s^*(\tilde{x}^*(t))) \right]$$

$$\geq \lambda_{o1}(\tau)\left[h_1(\tilde{x}^*(t)\ ,\ u) + \frac{\partial V_1^*}{\partial x}(\tilde{x}^*(t))\ .\ f(\tilde{x}^*(t)\ ,\ u)\right]$$

(19)

$$+\ \lambda_{o2}(\tau)\left[h_2(\tilde{x}^*(t)\ ,\ u) + \frac{\partial V_2^*}{\partial x}(\tilde{x}^*(t))\ .\ f(\tilde{x}^*(t)\ ,\ u)\right]$$

Proof :

(18) is valid along every trajectory emanating from $z^\tau \triangleq (0\ ,\ 0,\ \tilde{x}^*(\tau))$ and generated by :

$$s^*(\tilde{x}^*(t))\ ,\ t \in [\tau\ ,\ t_f)\ ,\ \tau \in [t_o\ ,\ t_f).$$

Of course (19) is a very stringent necessary condition.

4. Application to a linear-quadratic game.

Consider the L.Q. game defined by :

$$\dot{x} = Ax + Bu\ ,\ x \in E^n\ ,\ u \in E^{r_1} \times E^{r_2}$$

$$h_j(x\ ,\ u) = \frac{1}{2}(x^T Q_j x + u^T R_j u)$$

$$\theta \triangleq \{x : x_n = t_f\}$$

and assume that the strategies are restricted to feedback laws :

$$s(x) \triangleq - C(t)\ x$$

In particular the threat strategies are linear feedbacks and thus the functions $\varphi_j(\cdot) \triangleq V_j(\cdot\ ,\ \bar{s}\ ,\ \theta)$ are defined by quadratic forms :

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{2}\ x^T\ \bar{S}_j(t)x \quad j = 1\ ,\ 2\ ,\ x_n < t_f.$$

Let s^* be a strategy pair generating the terminating path $\mathfrak{X}^*$ and such that s^* is the solution of the B.P. at every point $\mathfrak{X}^*(t)$, $t \in [t_o, t_f]$; s^* is Pareto-optimal at x^o. It is well known that, for a L.Q. differential Game, Pareto optimal strategies at x^o can be found in the class of linear strategies :

$$s^*(x) = - C^*(t)x$$

thus the functions $V_j^*(\cdot)$ are defined also by quadratic forms :

$$V_j^*(x) = \frac{1}{2} x^T S_j^*(t)\ x,\ j = 1, 2$$

At $\mathfrak{X}^*(t)$, $\tilde{u}^*(t) \triangleq s^*(\mathfrak{X}^*(t))$ maximizes w.r.t. u the R.H.S. of (19) and thus verifies :

$$\mathfrak{U}^*(t) = - \left[\sum_{j=1}^{2} \lambda_{oj}(\tau)R(t)\right]^{-1} B^T\left[\sum_{j=1}^{2} \lambda_{oj}(\tau)S_j^*(t)\right]\tilde{x}^*(t) \qquad (20)$$

for all the weightings :

$$\lambda_{oj}(\tau) = \frac{1}{2} \mathfrak{X}^*(\tau)^T(S_k^*(\tau) - \bar{S}_k(\tau))\ \mathfrak{X}^*(\tau)$$

$$j, k = 1, 2 \qquad (21)$$
$$j \neq k$$
$$t_o < \tau < t$$

Relations (20), (21) show that $\mathfrak{U}^*(t)$ will be well defined only for extremely singular cases.

5. Implications of Liu's sufficient conditions.

In [1] P.T. Liu gives sufficient conditions for a strategy pair s^* to be a solution of the Bargaining Problem everywhere in X.

Theorem 3.1. and Corollary 3.1. show that these conditions must imply a certain form of singularity for the game.

Consider the example given in [1] :

$$\frac{dx_1}{dt} = 0 \qquad (22)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = u_1 + u_2 \qquad (23)$$

$$-1 \leq u_j \leq 0 \qquad j = 1 , 2 \qquad (24)$$

the pay-offs :

$$J_1 = \int_{t_o}^{t_f} (-1 + x_1 x_2)\, dt \qquad (25)$$

$$J_2 = \int_{t_o}^{t_f} (-1 - x_1 x_2)\, dt \qquad (26)$$

the target $\theta \triangleq \{(x_1 , x_2 , t_f) : x_2 \leq 0\}$

The functions $V_j^*(\cdot)$ are defined in $X \triangleq \{(x_1 , x_2) : -1 < x_1 x_2 < 1\}$ by :

$$V_1^*(x) = -\frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{4} x_1 x_2^2 \qquad (27)$$

$$V_2^*(x) = -\frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{4} x_1 x_2^2 \qquad (28)$$

and the strategy pair $s^*(\cdot)$ is given by :

$$s_j^*(x) = -1 , \quad j = 1 , 2 \quad \forall\, x \in X \qquad (29)$$

Consider the expression :

$$\sum_{j=1}^{2} \lambda_{oj} \left[h_j(x , u) + \frac{\partial V_j^*}{\partial x}(x).f(x , u) \right] =$$

$$(\lambda_{o1}(- 1 + x_1 x_2) + \lambda_{o2}(- 1 - x_1 x_2)) (1 + \frac{1}{2}(u_1 + u_2)) \quad (30)$$

For any $\lambda_{oj} \geq 0$, $j = 1 , 2$, the maximization of (30) w.r.t. u gives rise to the strategy (29). This means that, for any x^o in X, there exists the same Pareto-optimal control at x^o, $\tilde{u}^*(t) \equiv (- 1 , - 1)$. This is obviously a very singular case, since in general a whole family of Pareto-optimal controls, depending on the weighting $(\lambda_{o1} , \lambda_{o2})$ exists at every initial state x^o.

6. Conclusion.

The Nash's bargaining solution is a concept developed in the realm of the theory of games in normal form. Differential games are games defined in extensive form and it has already be shown [6] [7] that the passage from the solution concept of Core defined in the more abstract framework of games in characteristic function form, to a solution concept valid for games in extensive form is not easy. It is the opinion of this writer that the extension of the Nash's bargaining solution to differential games is another example where a solution concept, useful in a more abstract setting, is much less attractive when extended to games in extensive forms.

REFERENCES

[1] P.T. LIU, "Nonzero Sum Differential Games with Bargaining Solutions", Journal of Optimization Theory and Applications. Vol. 11, no.3, 1973.

[2] J. NASH, "Two-Person Cooperative Game" Econometrica Vol. 21, Jan. 1953, pp. 128-140.

[3] G. LEITMANN, S. ROCKLIN, "The effect of Playability in Differential Games on the Relation Between Best Guaranteed Costs and Saddlepoint Values" to appear in Journal of Optimization Theory and Applications.

[4] A. BLAQUIERE, G. LEITMANN, "On the Geometry of Optimal Processes" in G. LEITMANN edit. "Topics in Optimization" Academic Press. 1967.

[5] A. BLAQUIERE, "Quelques aspects géométriques des processus optimaux". Cours donné au CIME, Bressanone 1966. Editions Cremoneze, Rome.

[6] A. HAURIE, M.C. DELFOUR, "Individual and Collective Rationality in a Dynamic Pareto Equilibrium". Journal of Optimization Theory and Applications. Vol. 13, no.3, 1974.

[7] A. HAURIE, "On the Characteristic Function and the Core of a Multistage Game of Coalitions". Proceedings 11th Allerton Conference on Circuit and Systems Theory, Urbana, Illinois. October 1973.

BIBLIOGRAPHIE

R.J. Aumann (1961), The core of a cooperative game without side payments, *Trans. Amer. Math. Soc.* 98, pp. 539-552.

R.J. Aumann (1969), A survey of cooperative games without side payments, in *Essays in Mathematical Economics*, M. Shulbik, ed., Princeton.

R.J. Aumann et M. Maschler (1972), Some thoughts on the minimax principle, *Man. Sc.* Vol. 18, No. 5, pp. 54-63.

R.J. Aumann et B. Peleg (1960), Von Neumann-Morgenstern solution to cooperative games without side payments, *Bull. Amer. Math. Soc.* 66, pp. 173-179.

C. Berge (1957), *Théorie générale des jeux à n personnes*, Gauthier-Villars, France.

D.P. Bertsekas (1971), *Control of uncertain systems with a set-membership description of the uncertainty*, Report ESL-R-447 M.I.T., Cambridge, Mass.

D.P. Bertsekas et I.B. Rhodes (1971), On the minimax reachability of target sets and target tubes, *Automatica* Vol. 7, pp. 233-247.

A. Blaquière (1970 a)), An introduction to differential games, in *Differential games and related topics*, Kuhn et Szegö, eds., North-Holland.

A. Blaquière (1970 b)), Sur la géométrie des surfaces de Paréto d'un jeu différentiel à N-joueurs, *CRAS*, Paris, t.271, Série A, pp. 744-746.

A. Blaquière, L. Juricek et K. Wiese (1970), Sur la géométrie des surfaces de Paréto d'un jeu différentiel à N-joueurs; théorème du maximum, *CRAS*, Paris, t. 271, Série A, pp. 1030-1032.

A. Blaquière et G. Leitmann (1969), *Jeux Quantitatifs*, Gauthier-Villars, France.

A. Blaquière et K. Wiese (1970), Jeux quantitatifs multi-étages à N-personnes; coalitions, *CRAS*, Paris, t. 270, Série A, pp. 1280-1282.

J. Bram (1966), The Lagrange multiplier theorem for Max-Min with several constraints, *SIAM J. App. Math.* Vol. 14, pp. 665-667.

N.O. Da Cunha et E. Polak (1967), Constrained minimization under vector valued criteria in finite-dimensional spaces, *J. Math. Anal. Appl.* Vol. 19, No. 1, pp. 103-124.

J. Danskin (1966), On the theory of Min-Max, *SIAM J. App. Math.* Vol. 14, pp. 641-664.

J. Danskin (1967), *The theory of Max-Min and its application to weapons allocation problem*, Springer-Verlag.

M.C. Delfour et S. Mitter (1969), Reachability of perturbed systems and min-sup problems, *SIAM J. Control* Vol. 7, pp. 521-533.

V.F. Demyanov (1968), Algorithms for some minimax problems, *J. Computer System Sciences* Vol. 2, pp. 342-380.

V.F. Demyanov et A.M. Rubinov (1968), Minimization of functionals in normed spaces, *SIAM J. Control* Vol. 6, pp. 73-88.

A. Friedman (1971), *Differential games*, Wiley-Interscience.

J.D. Glover et F.C. Schweppe (1971), Control of linear dynamic systems with set constrained disturbances, *IEEE Trans. Aut. Control* AC-16, pp. 411-423.

J.L. Goffin et A. Haurie (1973), Necessary conditions and sufficient conditions for Paréto optimality in a multicriterion perturbed system, *Proceedings 5th IFIP Conference on Optimization Techniques, Rome*, Springer-Verlag.

A. Haurie (1970), *Jeux quantitatifs à M joueurs*, Thèse de doctorat de 3ième cycle, Paris.

A. Haurie (1973 a)), On Paréto-optimal decision for a coalition of a subset of players, *IEEE Trans. Aut. Control* Vol. Ac-18, pp. 144-149.

A. Haurie (1973 b)), Optimalité dans un système multicritère et perturbé avec application à des systèmes de commande linéaires à coûts quadratiques, *RAIRO*, 7ième année R-2, pp. 91-105.

A. Haurie (1975), On some properties of the characteristic function and the care of a multistage game of coalitions, *IEEE Trans. Aut. Control* Vol. AC- , pp.

A. Haurie et M.C. Delfour (1974), Individual and collective rationality in a dynamic Paréto equilibrium, *JOTA* Vol. 13, No. 3, pp. 290-302.

B. Lemaire (1970), *Problèmes Min-Max et applications au contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles linéaires*, Thèse de doctorat, Paris.

R.D. Luce et H. Raiffa (1957), *Games and decision*, Wiley.

J. Nash (1950 a)), Equilibrium points in n-person games, *Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A.* Vol. 36, pp. 48-49.

J. Nash (1950 b)), The bargaining problem, *Econometrica* Vol. 18, pp. 155-162.

J. Nash (1953), Two-person cooperative games, *Econometrica* Vol. 21, pp. 128-140.

G. Owen (1968), *Game theory*, Saunders.

J.B. Rosen (1965), Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games, *Econometrica* Vol. 33, pp. 520-550.

H. Scarf (1967), The core of a n-person game, *Econometrica* Vol. 35, pp. 50-69.

H. Scarf (1971), On the existence of a cooperative solution for a general class of n-person games, *Journal of Economic Theory* Vol. 3, pp. 169-181.

J. Von Neumann et O. Morgenstern (1944), *Theory of games and economic behaviour*, Princeton.

A.S. Witsenhausen (1966), *Minimax control of uncertain systems*, Report ESL-R-269, M.I.T., Cambridge, Mass.

DEUXIEME PARTIE

COMMANDE OPTIMALE

SUR UN HORIZON INFINI

CHAPITRE 1: COMMANDE OPTIMALE SUR UN HORIZON INFINI ET THEORIE DE LA CROISSANCE ECONOMIQUE

Plan: 1.1 Le modèle de Ramsey-Koopmans.

1.2 Un modèle de croissance économique avec contrôle de la population, effets de nuisance et ressources renouvelables et épuisables.

1.3 Présentation des chapitres suivants.

Introduction

Dans ce chapitre nous présenterons succintement quelques types de modèles de croissance économique optimale qui motiveront les développements des chapitres suivants. Nous insisterons en particulier sur les raisons qui militent en faveur d'une optimisation sur un horizon de temps infini ainsi que sur les justifications des hypothèses de convexités que nous serons amené à faire.

1.1. Le modèle de Ramsey-Koopmans.

Ramsey (1928) étudia le premier un modèle d'accumulation de capital. Koopmans (1965) étudia plus complètement les propriétés de ce modèle en le ramenant à la forme suivante:

Soit un bien qui à chaque instant peut être soit consommé soit investi sous forme d'une accumulation de capital. Ce bien est produit à l'aide du capital accumulé et de la main d'oeuvre disponible. Il existe pour cette économie une fonctionnelle d'utilité qui permet de comparer divers plan de consommation-production.

Définissons les variables suivantes:

$t \triangleq$ temps

$Y \triangleq$ production

$K \triangleq$ stock de capital

$L \triangleq$ main d'oeuvre

$C \triangleq$ consommation

$x_0 \triangleq$ utilité accumulée par l'économie

et les fonctions suivantes:

$$F : (K,L) \rightarrow Y = F(K,L)$$

$$U : (L,C) \rightarrow (\frac{C}{L}).$$

F est la *fonction de production* et U la *fonction d'utilité instantanée*. On voit que l'on suppose qu'il y a deux facteurs de production, capital et main d'oeuvre, et que l'utilité instantanée dépend de la consommation per capita. On suppose en général que F et U sont des fonctions concaves de K et L et $\frac{C}{L}$ respectivement.

L'équation d'évolution du stock de capital et du stock de main d'oeuvre sera:

$$\dot{K} = Y - C = F(K,L) - C$$

$$\dot{L} = \rho L$$

tandis que l'équation d'évolution du "stock d'utilité" sera:

$$\dot{x}_0 = U(\frac{C}{L}).$$

Si on suppose que F est homogène de degré 1, c'est-à-dire que

les rendements d'échelle sont constants, le système économique peut être redéfini par les équations suivantes:

$$\dot{k} = f(k) - \rho k - c$$

$$\dot{x}_0 = U(c)$$

où on a posé:

$$c = \frac{C}{L}$$

$$k = \frac{K}{L} = \frac{K}{L_0} e^{-\rho t}$$

$$f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = F(\frac{K}{L}, 1) = F(k,1)$$

et où L_0 est la main d'oeuvre en t=0.

Les contraintes suivantes devront en outre être vérifiées:

$$k > 0, \quad c > 0.$$

Dans un modèle de ce genre appliqué à un contexte macroéconomique il est difficile de définir un horizon de temps fini et d'optimiser l'accumulation d'utilité sur cet horizon. En effet il faudra toujours, d'un point de vue économique, valoriser le stock de capital en fin d'horizon et la seule façon normale d'effectuer cette valorisation est de tenir compte de l'usage ultérieur que l'on peut faire du capital accumulé.

Koopmans a montré que, sous des hypothèses assez larges, le problème d'optimisation:

$$P1 \begin{cases} \text{Max} \int_0^{\infty} (U(c)-\bar{U})dt \\ \dot{k} = f(k) - \rho k - c \\ k \geq 0, \quad c \geq 0 \end{cases}$$

avait une solution quand $\bar{U}$ est défini par:

$$P2 \begin{cases} \bar{U} = \text{Max } U(c) \\ 0 = f(k) - \rho k - c \\ k \geq 0, \quad c \geq 0. \end{cases}$$

On s'apperçoit que $\bar{U}$ est *l'utilité instantanée maximale en régime stationnaire*. Si la solution de P2 est $(\bar{k},\bar{c})$ il a été établi de plus que la solution de P1 doit nécessairement vérifier:

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = \bar{k}.$$

Une étude complète des aspects économiques de ce modèle peut être trouvée aussi dans l'ouvrage de Burmeister et Dobell (1970).

1.2. Un modèle de croissance économique avec contrôle de la population, effets de nuisance et ressources renouvelables ou épuisables.

Les liens entre la croissance économique et l'accroissement des nuisances, et en particulier de la pollution, ont été étudiés récemment par Keeler, Spence et Zeckauser (1971) et Kolm (1969) entre autres auteurs. L. Pitchford (1972) a intégré le problème du contrôle de la population dans le schéma économique. Plourde (1970) a étudié le problème de la gestion d'une ressource renouvelable et Nguyen (1975) celui de ressources non renouvelables. Un modèle intégrant tous ces aspects pourrait avoir la structure suivante:

Soient les variables d'état:

$K \triangleq$ stock de capital

$X_1 \triangleq$ stock de ressources non renouvelables

$X_2 \triangleq$ stock de ressources renouvelables

$P \triangleq$ pollution accumulée

$L \triangleq$ niveau de population

et les variables de commande:

$Y \triangleq$ production

$C \triangleq$ consommation totale

$N \triangleq$ partie du revenu allouée au contrôle des naissances

$R_1 \triangleq$ taux d'extraction des ressources épuisables

$R_2 \triangleq$ taux d'extraction des ressources renouvelables

$Q \triangleq$ niveau de l'activité économique dédiée à la régénération des ressources

$G \triangleq$ taux d'émission de pollution.

Considérons les équations d'état:

$$\dot{K} = Y - C - N - \sigma K$$

$$\dot{X}_1 = - R_1$$

$$\dot{X}_2 = \Phi(X_2, P, Q) - R_2$$

$$\dot{P} = G - \nu P$$

$$\dot{L} = D(L, N)$$

où σ est un taux de dépréciation du capital, $\Phi(\cdot)$ définit le taux de regénération des ressources renouvelables, $D(\cdot)$ définit le taux net de natalité de la population.

Des contraintes additionnelles limitent le choix des variables de commande:

$$0 \leq Y \leq \tilde{Y}(K_Y, R_1, R_2, P, L_Y)$$

$$0 \leq R_1 \leq \tilde{R}_1(K_1, L_1)$$

$$0 \leq R_2 \leq \tilde{R}_2(K_2, L_2)$$

$$0 \leq Q \leq \tilde{Q}(K_Q, L_Q)$$

$$0 \leq \tilde{G}(K_Y, K_1, K_2, K_Q, K_G, L_Y, \ldots, L_G) \leq G$$

où:

$$K_Y, K_1, K_2, K_Q, K_G$$

$$L_Y, L_1, L_2, L_Q, L_G$$

sont les parts du capital et de la main-d'oeuvre affectées aux différentes activités et devant satisfaire les contraintes:

$$K_Y + K_1 + K_2 + K_Q + K_G \leq K$$

$$L_Y + L_1 + L_2 + L_Q + L_G \leq L.$$

Finalement nous considérons l'équation d'accumulation d'utilité suivante:

$$\dot{x}_0 = W(C, L, P, G, X_1, X_2).$$

Il serait possible, à partir de considérations sur les rendements marginaux décroissants des activités économiques, de supposer que les fonctions $\tilde{Y}, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{Q}$ sont concaves et que $\tilde{G}$ est convexe. De même les phénomènes de saturation des satisfactions justifient de considérer W comme une fonction concave.

Dans un modèle incluant les effets de nuisance et d'épuisement de ressources, la considération d'un horizon de temps infini s'impose. Malheureusement les techniques proposées par Koopmans (1965) et d'autres auteurs pour analyser le comportement des solutions du modèle de Ramsey

deviennent inutilisables dès que le nombre de variables d'état dépasse l'unité. Il y avait ainsi une nécessité d'étudier dans un contexte suffisamment général le problème de la commande optimale sur un horizon infini pour obtenir des résultats absolument indépendants de la dimension de l'espace d'état.

Plus de détails sur des modèles du type de celui que nous venons d'esquisser sont donnés par Haurie, Polis et Yansouni (1972, 1973 a) et b), 1974).

1.3. Présentation des chapitres suivants.

Dans le Chapitre 2 nous donnerons une définition correcte du problème de commande optimale sur un horizon infini en nous inspirant d'un récent ouvrage de Halkin (1972).

Dans le Chapitre 3 nous établirons de façon générale la propriété dite du "Turnpike" qui établit un lien entre le problème de commande optimale sur un horizon infini et le problème d'optimisation de l'utilité instantanée en régime stationnaire. En outre des propriétés de commandabilité du système seront établies.

Dans le Chapitre 4 les propriétés de convergence vers *un régime stationnaire extrémal* des trajectoires optimales sur un horizon infini seront établies. Nous pourrons alors en déduire un théorème d'existence d'une solution au problème de commande optimale sur un horizon infini.

CHAPITRE 2: NOTIONS D'OPTIMALITE SUR UN HORIZON INFINI ET RAPPELS SUR LE PRINCIPE DU MAXIMUM DE HALKIN

Plan: 2.1 Le système de commande.

2.2 F-optimalité et théorème du maximum.

2.3 I-optimalité.

2.4 Conclusion.

Introduction

Dans ce chapitre nous définissons le problème de commande optimale sur un horizon infini. Deux notions d'optimalité et un théorème du maximum sont présentés. Ces notions et ces résultats ont été obtenus par H. Halkin et constituent la base de notre recherche qui portera plus spécifiquement sur les propriétés de convergence des chemins optimaux vers des régimes stationnaires extrémaux, propriétés reliées à la propriété dite de "Turnpike" en économie mathématique.

2.1. Le système de commande.

Nous considérons un système décrit par:

$$\dot{x} = f(x,u)$$

$$\dot{x}_0 = f_0(x,u)$$

$$x \in X \subset E^n, \quad x_0 \in R, \; u \in U(x) \subset E^m$$

où $f : E^{n+m} \to E^n$ est continue en u et continûment différentiable en x

et $f_0 : E^{n+m} \to R$ est une fonctionnelle, c^1 en x et continue en u; n et m sont des entiers donnés.

x est la variable d'état du système, x_0 est l'utilité accumulée. U(x) est l'ensemble de contrainte pour la commande u, nous le supposerons *compact* et *variant continûment* avec x.

Une trajectoire $\tilde{\underset{\sim}{x}}$, issue de (t_i, x^i) sera un couple $(\tilde{x}_0, \tilde{x})$ de fonctions définies sur la demi droite $[t_i, \infty)$ et vérifiant:

$$\tilde{x}(t) \in X, \quad \tilde{x}_0(t) \in R, \quad \forall\ t \in [t_i, \infty)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) &= f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \\ \frac{d}{dt}\tilde{x}_0(t) &= f_0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \end{aligned}\right\} \text{ presque partout sur } [t_i, \infty)$$

$$\tilde{x}_0(t_i) = 0, \quad \tilde{x}(t_i) = x^i$$

pour une fonction $\tilde{u}$ mesurable et vérifiant

$$\tilde{u}(t) \in U(\tilde{x}(t)), \quad \forall\ t \in [t_i, \infty)$$

$\tilde{u}$ sera appelée une *commande admissible* engendrant une *trajectoire admissible* $\tilde{\underset{\sim}{x}}$. $\tilde{x}$ sera appelée un *chemin* issu de (t_i, x^i). Nous supposons que les préférences de l'agent pilotant le système vont vers les utilités croissantes.

2.2. F-optimalité et théorème du maximum

Si nous considérons la commande du système décrit précédemment sur un horizon fini $[t_i, t_f]$ l'optimalité correspondrait à la

maximisation de l'utilité finale $\tilde{x}_0(t_f)$ sous les contraintes décrivant le système.

Quand nous nous plaçons en horizon infini la notion d'optimalité devient plus délicate à définir car il se peut que pour toute trajectoire admissible $\tilde{\underset{\sim}{x}}$ on ait:

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{x}_0(t) = \infty \ .$$

H. Halkin (1972) a proposé deux notions d'optimalité pour le problème de commande optimale sur un horizon infini. Nous les avons rebaptisé F-optimalité et I-optimalité respectivement. Dans cette section nous considérerons plus particulièrement la notion de F-optimalité.

Définition 2.1: Une trajectoire $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ issue de (t_i,x^i) sera *F-optimale* si, pour toute trajectoire $\tilde{\underset{\sim}{x}}^1$ telle que:

$$\tilde{\underset{\sim}{x}}^*(t_i) = \tilde{\underset{\sim}{x}}^1(t_i) = (0,x^i)$$

et

$$\tilde{x}^*(t_f) = \tilde{x}^1(t_f) \quad \text{pour} \quad t_f \in [t_i,\infty)$$

on a:

$$\tilde{x}_0^1(t_f) \leq \tilde{x}_0^*(t_f). \qquad \blacksquare$$

Appelons *tronçon fini* de la trajectoire $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ sa restriction sur un intervalle fini $[t_i,t_f]$. Une trajectoire F-optimale est donc telle que tout tronçon fini est solution du problème de commande optimale

sur l'horizon $[t_i,t_f]$ de ce tronçon, avec état terminal fixé, défini par:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Max } \tilde{x}_0(t_f) \\ \text{sous les contraintes:} \\ \tilde{\underset{\sim}{x}}(t_i) = (0,x^i) \\ \dot{x} = f(x,u) \\ \dot{x}_0 = f_0(x,u) \\ x \in X, \quad u \in U(x) \\ \tilde{x}(t_f) = \tilde{x}^*(t_f) \end{array}\right\} . \qquad (2.1)$$

On s'aperçoit facilement que cela revient à dire qu'une trajectoire F-optimale va vérifier une propriété analogue au *principe de Bellman* en programmation dynamique.

H. Halkin (1972) a aussi pu montrer qu'une trajectoire F-optimale vérifie un principe du maximum, nous rappellerons ce résultat et indiquerons brièvement sa démonstration. Pour conserver une certaine simplicité au développement nous supposerons que l'ensemble de contrainte U(x) ne dépend plus de x:

$$U(x) \equiv U, \qquad \forall\, x \in X.$$

Comme on pourra aisément le voir un principe du maximum pourrait aussi être établi dans le cas général, en faisant quelques hypothèses supplémentaires (cf. Arrow (1968)).

Théorème 2.1: Si $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ est une trajectoire F-optimale issue de (t_i, x^i) engendrée par $\tilde{u}^*$ alors il existe un nombre non négatif p_0 et une fonction $p : [t_i, \infty) \to E^n$ tels que:

(i) $\| p_0, p(t_i) \| = 1$

(ii) $\dot{p}(t) = - \frac{\partial H}{\partial \xi} [\xi, \tilde{u}^*(t), p_0, p(t)] \Big|_{\xi = \tilde{x}^*(t)}$

presque partout sur $[t_i, \infty)$

(iii) $H[\tilde{x}^*(t), \tilde{u}^*(t), p_0, p(t)] \geq$

$H[\tilde{x}^*(t), u, p_0, p(t)], \quad \forall\, u \in U, \quad \forall\, t \in [t_i, \infty)$

où $H(\cdot)$ est l'hamiltonien défini par:

$$H[x, u, p_0, p(t)] \triangleq p_0 f_0(x,u) + \langle p(t), f(x,u) \rangle .$$

Démonstration (esquisse): Tout tronçon fini sur un horizon $[t_i, t_f]$ va vérifier un principe du maximum tel qu'établi par L.S. Pontryagin et al. (1962), A. Blaquière et G. Leitmann (1967) ou H. Halkin (1967). Les variables adjointes peuvent toujours être normalisées de façon à vérifier la condition (i) à l'instant initial. Si on considère une suite d'instants $\{t_f^n\}_{n \in N} \to \infty$ il y correspondra ainsi une suite de vecteurs $(p_0^n, p^n(t_i))$ de norme unité d'où on peut donc extraire une suite qui converge vers une limite $(p_0, p(t_i))$. La fin de la démonstration est une conséquence immédiate du fait que la solution de l'équation variationnelle adjointe (ii) varie continûment avec les conditions initiales. ■

L'absence de conditions de transversalité dans ces conditions nécessaires ne nous permet donc pas de caractériser des *trajectoires extrémales*. Comme nous le verrons au Chapitre 6 à propos d'un théorème d'existence, l'absence de conditions de transversalité ou d'une condition équivalente dans le théorème précédent est due au fait que la notion de F-optimalité n'est pas assez restrictive et que, en général, une infinité de trajectoires F-optimales peuvent être issues du même état initial. Ceci justifie donc la considération d'une notion d'optimalité plus restrictive, ce que nous faisons en section suivante.

2.3. I-optimalité

Cette notion d'optimalité a aussi été proposée par H. Halkin (1972).

Définition 2.2: Une trajectoire $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ issue de (t_i, x^i) sera *I-optimale* si, pour toute trajectoire $\tilde{\underset{\sim}{x}}^1$ telle que

$$\tilde{\underset{\sim}{x}}^*(t_i) = \tilde{\underset{\sim}{x}}^1(t_i) = (0, x^i)$$

on a:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, t_f > t_i, \quad \exists\, t \geq t_f \quad \text{t.q.}$$

$$\tilde{x}_0^1(t) < \tilde{x}_0^*(t) + \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Le résultat suivant montre que cette notion d'optimalité est plus restrictive que la notion de F-optimalité

Théorème 2.2: Une trajectoire I-optimale est aussi F-optimale.

La démonstration de ce résultat, qui est très simple, est donnée par H. Halkin (1972).

Le théorème du maximum sera donc vrai pour une trajectoire I-optimale.

Au chapitre 4 nous verrons que la notion de I-optimalité est un concept conduisant à des conditions nécessaires d'optimalité permettant la caractérisation complète des trajectoires extrémales, du moins sous des hypothèses correspondant aux modèles de croissance économique optimale.

2.4. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons principalement présenté les définitions de l'optimalité sur un horizon infini et les résultats obtenus par Halkin. Dans les chapitres suivants nous établirons un lien entre le problème de commande optimale sur un horizon infini et les propriétes de "*Turnpike*" de l'économie mathématiques.

CHAPITRE 3: LA PROPRIETE DE TURNPIKE

Plan: 3.1 Les hypothèses de base et le lemme d'Atsumi.

3.2 Un théorème de commandabilité.

3.3 La propriété de Turnpike.

3.4 Conclusion.

Introduction

Dans ce chapitre nous établirons une propriété de "Turnpike" pour le problème de commande optimale sur un horizon fini. Cette propriété concerne le comportement des trajectoires optimales qui auront, sous certaines conditions, tendance à se "rapprocher" d'un ensemble de points extrémaux appelés points de Von Neumann. Le nom de "Turnpike", signifiant Autoroute en américain est couramment utilisé en économie mathématique et en recherche opérationnelle pour désigner de telles propriétés. Les résultats obtenus dans ce chapitre sont une généralisation au problème de commande optimale des résultats présentés par L.W. McKenzie (1968) dans le contexte de modèles économiques en temps discret.

3.1. Les hypothèses de base et le lemme d'Atsumi

Nous considérons le système de commande défini en section 2.1. Posons:

Définition 3.1: *L'ensemble de transformation* Δ est le sous ensemble E^{2n+1} défini par:

$$y \triangleq (\xi,\eta,\gamma) \in \Delta \Rightarrow \exists\ \xi \in X,\ \exists\ u \in U(\xi)$$

$$\text{t.q.} \quad \eta = f(\xi,u) \text{ et } \gamma = f_0(\xi,u).$$

L'ensemble de transformation étendu Ω est le sous-ensemble de E^{2n+1} défini par:

$$y \in \Omega \Rightarrow \exists\ y' \in \Delta \quad \text{t.q.} \quad \xi' = \xi,\ \eta' \geq \eta,\ \gamma' \geq \gamma.$$

L'ensemble d'expansion Ω^+ est le sous ensemble de Ω défini par:

$$y \in \Omega^+ \Rightarrow y \in \Omega \text{ et } (\eta,\gamma) \geq 0. \quad \blacksquare$$

Nous ferons alors les hypothèses suivantes:

Hypothèse 3.1: Δ est compact, Ω est convexe, Ω^+ a un intérieur non vide. $\blacksquare$

Hypothèse 3.2: Si l'on a:

$$(x,\dot{x},\dot{x}_0) \in \Delta, \quad \dot{x} \geq 0$$

alors il existe $\dot{x}_0' \geq \dot{x}_0$ tel que l'on ait:

$$(x,0,\dot{x}_0') \in \Delta. \quad \blacksquare$$

Cette hypothèse revient à dire que si une croissance positive est possible ($\dot{x} \geq 0$) alors une croissance nulle l'est aussi ($\dot{x} = 0$) sans réduire le taux d'accumulation de l'utilité ($\dot{x}_0' \geq \dot{x}_0$).

On peut établir les résultats suivants:

Lemme 3.1: Sous les hypothèses 3.1 et 3.2 il existe un nombre réel w^* et un vecteur $p^* \in E^n$ tels que:

(i) $w^* = \text{Max}\{\gamma : y \triangleq (\xi,\eta,\gamma) \in \Omega^+\}$

(ii) $y \in \Omega, \quad \gamma + \langle p^*,\eta \rangle \leq w^*$

(iii) $y^* \triangleq (x^*,0,w^*) \in \Delta.$

Démonstration: cf. A. Haurie (1974) Lemme 2.1. ■

Corollaire 3.1 (Lemme d'Atsumi): Soit F l'ensemble des points de Ω pour lesquels on a:

$$\gamma + \langle p^*,\eta \rangle = w^*$$

alors on a la propriété suivante:

$$\forall\ \varepsilon > 0, \quad \exists\ \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad y \triangleq (x,\dot{x},\dot{x}_0) \in \Delta$$

et

$$d(y,F) > \varepsilon \Rightarrow \dot{x}_0 + \langle p^*,\dot{x} \rangle < w^* - \delta$$

où $d(y,F)$ est la distance de y à F.

Démonstration: cf. A. Haurie (1974), Corollary 2.1. ■

Remarquons que w^* correspond au taux d'accumulation d'utilité maximale dans l'ensemble d'expansion. Par analogie avec la théorie économique nous appellerons F *l'ensemble des points de Von Neumann* (cf. L.W. McKenzie (1968)). Un résultat similaire au Corollaire 3.1 a été établi par H. Atsumi (1965), dans le contexte d'un modèle de croissance économique à temps discret. Ce lemme d'Atsumi est à la base

de la propriété de "Turnpike" ainsi que des propriétés de convergence que nous établirons au chapitre suivant. Avant de passer à ces questions nous établirons un théorème de commandabilité du système décrit en section 2.1.

3.2. Un théorème de commandabilité

Le résultat que nous allons établir dans cette section peut être considéré comme une généralisation au cas d'un problème de commande d'un résultat présenté par L.W. McKenzie (1968) dans le cadre d'un modèle de croissance économique à temps discret.

Hypothèse 3.3: $\Gamma \triangleq \{(x,f(x,u)) : x \in X, u \in U(x)\}$ est un sous ensemble convexe de E^{2n}. ■

Hypothèse 3.4: Il existe une matrice non singulière A telle que:

(i) $x \geq 0, \quad x \neq 0 \Rightarrow Ax < 0$

(ii) $(x,\dot{x}) \in \Gamma \Rightarrow Ax \leq \dot{x}$

(iii) Si l'on a:

$$(x,\dot{x}) \in \Gamma \text{ et } Ax \leq \dot{x}' \leq \dot{x}$$

alors on a

$$z' \triangleq (x,\dot{x}') \in \Gamma. \quad \blacksquare$$

Définition 3.2: Nous dirons qu'un état $x \in X$ est *maintenable* s'il existe $u \in U(x)$ tel que l'on ait:

$$f(x,u) = 0.$$

Nous dirons qu'un état $x \in X$ est *expansible* s'il existe $u \in U(x)$ tel que l'on ait:

$$f(x,u) > 0.$$

Nous dirons qu'un état $x \in X$ est *non saturé* s'il existe un état maintenable x' tel que l'on ait:

$$x' > x. \quad \blacksquare$$

Théorème 3.1: Sous les hypothèses 3.3 et 3.4, si $x^i \geq 0$ est expansible et si $x^f \geq 0$ est maintenable alors il existe un chemin $\tilde{x}$ issu de (t_i, x^i) et tel que:

$$\lim_{t \to \infty} \tilde{x}(t) = x^f.$$

Démonstration: Puisque x^i est expansible et x^f est maintenable nous pouvons trouver

$$z^i \triangleq (x^i, \dot{x}^i) \in \Gamma \text{ avec } \dot{x}^i > 0$$

$$z^f \triangleq (x^f, 0) \in \Gamma.$$

Puisque Δ est convexe, pour tout α réel positif on a:

$$z^t \triangleq (x^t, \dot{x}^t) \triangleq e^{-\alpha t} z^i + (1-e^{-\alpha t}) z^f \in \Gamma, \quad \forall\, t \in [t_i, \infty).$$

On peut ainsi définir une fonction:

$$\tilde{x} : [t_i, \infty) \to X, \quad t \mapsto x(t) \triangleq x^t.$$

Cette fonction est différentiable et, selon l'hypothèse 3.4, on aura:

$$\left(\tilde{x}(t), \frac{d}{dt}\tilde{x}(t)\right) \in \Gamma$$

si:

$$Ax^t \leq \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) \leq \dot{x}^t.$$

Or ces inégalités s'écrivent:

$$e^{-\alpha t}A(x^i-x^f) + Ax^f \leq -\alpha e^{-\alpha t}(x^i-x^f) \leq e^{-\alpha t}\dot{x}^i.$$

Comme on a:

$$\dot{x}^i > 0$$

pour α suffisamment petit la seconde inégalité sera vérifiée. La première inégalité est équivalente à la suivante:

$$e^{-\alpha t}[\alpha I+A](x^i-x^f) + Ax^f \leq 0.$$

Comme on a, selon l'hypothèse 3.4:

$$Ax^f < 0.$$

Cette inégalité sera satisfaite si l'on a:

$$[\alpha I+A](x^i-x^f) + Ax^f \leq 0$$

et selon l'hypothèse 3.4 cela sera possible pour α suffisamment petit. Dans ces conditions nous voyons que pour α suffisamment petit on a:

$$\forall\ t \in [t_i,\infty), \quad \left(\tilde{x}(t), \frac{d}{dt}\tilde{x}(t)\right) \in \Gamma$$

donc $\tilde{x}$ est un chemin qui vérifie évidemment:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x^f. \qquad \blacksquare$$

Théorème 3.2: Si $x^i \geq 0$ est expansible et $x^f \geq 0$ est non saturé, alors, sous les hypothèses 3.3 et 3.4, il existe un chemin $\tilde{x}$ issu de (t_i,x^i) et un instant $t_f \in [t_i,\infty)$ tel que:

$$\tilde{x}(t_f) = x^f.$$

Démonstration: Puisque x^i est expansible et x^f est non saturé, il existe un chemin $\tilde{x}'$ issu de (t_i,x^i) et convergeant vers un état x^ℓ tel que:

$$x^\ell > x^f.$$

Donc il existe $t_\ell \in [t_i,\infty)$ tel que:

$$\tilde{x}'(t) > x^f, \quad \forall\ t > t_\ell.$$

Pour établir le théorème il suffit maintenant de montrer qu'il existe un instant $t'_\ell > t_\ell$ et un chemin $\tilde{x}''$ issu de $(t'_\ell,\tilde{x}'(t'_\ell))$ tel que pour un $t_f \in [t'_\ell,\infty)$ on ait:

$$\tilde{x}''(t_f) = x^f.$$

Pour cela considérons deux instants t'_ℓ,t_f tels que l'on ait:

$$\exists\ u \in U[\tilde{x}'(t'_\ell)] \quad \text{t.q.} \quad Ax^f \leq \frac{x^f+\tilde{x}'(t'_\ell)}{t_f-t'_\ell} \leq f[\tilde{x}'(t'_\ell),u].$$

Ceci est possible puisque $\tilde{x}'$ converge vers x^{ℓ} qui est maintenable, que $U(\cdot)$ et $f(\cdot)$ varient continûment avec x et que l'on a:

$$\forall\ t > t_{\ell},\quad \tilde{x}'(t) > x^{f}$$

et donc:

$$\forall\ t > t_{\ell},\quad A\tilde{x}'(t) < Ax^{f}.$$

Il suffira donc de prendre t'_{ℓ} suffisamment grand et $t_f > t'_{\ell}$ suffisamment grand pour assurer les inégalités désirées.

Définissons alors $\tilde{x}'' : [t'_{\ell}, t_f] \to X$ par:

$$\tilde{x}''(t) \triangleq \frac{t-t'_{\ell}}{t_f-t'_{\ell}}\, x^{f} + \frac{t_f-t}{t_f-t'_{\ell}}\, \tilde{x}'(t'_{\ell}).$$

On aura donc:

$$\frac{d}{dt}\,\tilde{x}''(t) = \frac{x^{f}-\tilde{x}'(t'_{\ell})}{t_f-t'_{\ell}}\ .$$

Les inégalités établies plus haut nous assurent que:

$$\left.\begin{array}{l} \left(x^{f}, \frac{d}{dt}\,\tilde{x}''(t)\right) \in \Gamma \\ \left(\tilde{x}'(t'_{\ell}), \frac{d}{dt}\,\tilde{x}''(t)\right) \in \Gamma \end{array}\right\} \forall\ t \in [t'_{\ell}, t_f]$$

puisque Γ est convexe, on en déduit que $\tilde{x}''$ est un tronçon fini d'un chemin vérifiant:

$$\tilde{x}''(t'_{\ell}) = \tilde{x}'(t_{\ell}),\ \tilde{x}''(t_f) = x^{f}.$$

Le chemin $\tilde{x}$ vérifiera:

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = \tilde{x}'(t), & \forall\ t \in [t_i, t'_\ell] \\ \tilde{x}(t) = \tilde{x}''(t), & \forall\ t \in [t'_\ell, t_f]. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Les hypothèses 3.3 et 3.4 permettant d'établir ce théorème de commandabilité sont évidemment assez restrictives. L'exemple suivant a cependant la structure des modèles d'accumulation de capital de type néo-classique (cf. K.J. Arrow et M. Kurz (1970)).

Exemple 3.1: Considérons les équations d'état suivantes:

$$\dot{x}_i = u_i - \rho_i x_i \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

$$x \triangleq \{x_i\}_{i=1,\ldots,n} \geq 0$$

$$u \triangleq \{u_i\}_{i=1,\ldots,n} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \leq \phi(x)$$

où $\phi(\cdot)$ est une fonctionnelle concave en x. Montrons tout d'abord que l'ensemble Γ est convexe. Soit (x,u) et (x',u') tels que:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \leq \phi(x) \text{ et } \sum_{i=1}^{n} u'_i \leq \phi(x').$$

La concavité de ϕ assure que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha u_i + (1-\alpha)u'_i \leq \phi[\alpha x + (1-\alpha)x']$$

donc Γ est convexe.

L'hypothèse 3.4 est aisément vérifiée, pour $\rho_i > 0$, i=1,...,n, en prenant:

$$A = - \text{Diag}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n).$$

3.3. La propriété de "Turnpike"

Dans cette section nous considérons le problème de commande optimale sur horizon fini:

$$\text{Max } \tilde{x}_0(t_f) = \int_{t_i}^{t_f} f_0(x,u)dt \tag{3.1}$$

sous les contraintes:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = f(x,u) \\ u \in U(x), \quad x \in X \\ \tilde{x}(t_i) = x^i \\ \tilde{x}(t_f) = x^f \end{array}\right\}. \tag{3.2}$$

Considérons aussi le problème d'optimisation en régime stationnaire:

$$\text{Max } f_0(x,u) \tag{3.3}$$

sous les contraintes:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = f(x,u) \\ u \in U(x), \quad x \in X \end{array}\right\}. \tag{3.4}$$

Lemme 3.2: Sous les hypothèses 3.1 et 3.2 le problème d'optimalisation défini par (3.3) et (3.4) a une solution donnée par:

$$x = x^*$$

$$0 = f(x^*,u^*)$$

$$w^* = f_0(x^*,u^*)$$

où $y^* \triangleq (x^*,0,w^*)$ a été défini au lemme 3.1.

Démonstration: On a:

$$w^* = \text{Max}\{\gamma : y \triangleq (\xi,\eta,\Gamma) \in \Omega^+\}$$

cependant que l'ensemble:

$$Y \triangleq \{y \triangleq (x,\dot{x},\dot{x}_0) \in \Delta : \dot{x} = 0 \text{ et } \dot{x}_0 \geq 0\}$$

est une partie de Ω^+.

D'après le lemme 3.1, (iii), on a $y^* \in Y$, c'est donc la solution du problème défini par (3.3) et (3.4). ■

Définition 3.3: x^* sera appelé un *état stationnaire extrémal*. ■

Nous ferons en outre l'hypothèse suivante concernant le système décrit en section 2.1 et l'état stationnaire extrémal x^*.

Hypothèse 3.5: (i) Il existe un instant T tel que pour tout instant terminal $t_f > T$ le problème de commande optimale défini par (3.1) et (3.2) ait une solution donnée par $\underset{\sim}{\tilde{x}}^\dagger : [t_i,t_f] \to E^{n+1}$, $\tilde{x}^\dagger(t_i) = x^i$, $\tilde{x}^\dagger(t_f) = x^f$, engendrée par $\tilde{u}^\dagger : [t_i,t_f] \to E^m$, $\tilde{u}^\dagger(t) \in U[\tilde{x}^\dagger(t)]$, $\tilde{x}(t) \in X$.

(ii) Il existe une trajectoire $\tilde{x}^1$ issue de (t_i,x^i) et un instant t_1 tel que:

$$\tilde{x}^1(t_1) = x^*.$$

(iii) Il existe une trajectoire $\tilde{x}^2$ issue de $(0,x^*)$ et un instant t_2 tel que:

$$\tilde{x}^2(t_2) = x^f. \qquad \square$$

Nous associerons au tronçon $\tilde{x}^\dagger$ la fonction $\tilde{y}^\dagger$ définie dans E^{2n+1} par:

$$\forall\, t \in [t_i,t_f],\quad \tilde{y}^\dagger(t) \triangleq (\tilde{x}^\dagger(t), f[\tilde{x}^\dagger(t),\tilde{u}^\dagger(t)], f_0[\tilde{x}^\dagger(t),\tilde{u}\ (t)])$$

et nous considérerons la fonctionnelle:

$$\lambda : [t_i,t_f] \to R$$

définie par:

$$\lambda(t) \triangleq d(\tilde{y}^\dagger(t),F)$$

où F est l'ensemble des points de Von Neumann défini en section 3.1. Finalement, pour tout ε, réel, positif, donné nous considérerons l'ensemble:

$$\Theta(\varepsilon;t_i,t_f) \triangleq \{t \in [t_i,t_f] : \lambda(t) > \varepsilon\}.$$

Il s'agit donc de l'ensemble des instants où la valeur de la fonction $\tilde{y}^\dagger$ se trouve à une distance supérieure à ε de l'ensemble $\mathbb{F}$ des points de Von Neumann. Comme l'application:

$$d(\cdot,F) : E^{2n+1} \to R,\quad y \to d(y,F)$$

est continue et comme $\tilde{y}^{\dagger}$ est mesurable, la fonctionnelle λ est mesurable et donc l'ensemble $\circledR(\varepsilon;t_i,t_f)$ l'est aussi, nous noterons:

$$\mu[\circledR(\varepsilon;t_i,t_f)]$$

la mesure de cet ensemble.

Nous pouvons maintenant énoncer le principal théorème de ce chapitre.

Théorème 3.3: Si le système de commande décrit en section 2.1 satisfait aux hypothèses 3.1, 3.2 et 3.5 alors on a:

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \nu(\varepsilon) \quad \text{t.q.} \quad \forall\ t_f > \text{Max}\{T, t_1+t_2\}$$

$$\mu[\circledR(\varepsilon;t_i,t_f)] < \nu(\varepsilon).$$

Démonstration: Construisons un tronçon de chemin $\tilde{x} : [t_i,t_f] \to X$ en posant:

$$\tilde{x}(t) \triangleq \tilde{x}^1(t) \qquad \forall\ t \in [t_i,t_1]$$

$$\tilde{x}(t) \triangleq x^* \qquad \forall\ t \in [t_1,t_f-t_2]$$

$$\tilde{x}(t) \triangleq \tilde{x}^2(t-t_f+t_2) \qquad \forall\ t \in [t_f-t_2,t_f].$$

On a $\tilde{x}(t_i) = x^i$ et $\tilde{x}(t_f) = x^f$.

Le long du tronçon de chemin $\tilde{x}$ l'utilité accumulée sera donnée par:

$$\tilde{x}_0(t_f) = \tilde{x}_0^1(t_1) + (t_f-t_1-t_2)w^* + \tilde{x}_0^2(t_2) \tag{3.5}$$

et, puisque $\tilde{\underset{\sim}{x}}^{\dagger}$ est la solution du problème de commande optimale défini

en (3.1) et (3.2) on aura:

$$\tilde{x}_0(t_f) \leq \tilde{x}_0^{\dagger}(t_f). \tag{3.6}$$

D'après le lemme 3.1 on a, d'autre part:

$$\forall\, t \in [t_i,t_f],\quad f_0(\tilde{x}^{\dagger}(t),\tilde{u}^{\dagger}(t)) + \langle p^*, f(\tilde{x}^{\dagger}(t),\tilde{u}^{\dagger}(t))\rangle \leq w^*.$$

En intégrant et en utilisant le corollaire 3.1 (lemme d'Atsumi) on aura:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ t.q. } \tilde{x}_0^{\dagger}(t_f) < w^*(t_f-t_i) - \langle p^*, x^f-x^i\rangle - \delta\mu[\circledR(\varepsilon;t_i,t_f)].$$

A partir de cette inégalité et des relations (3.5) et (3.6) on obtient:

$$\mu[\circledR(\varepsilon;t_i,t_f)] < \nu(\varepsilon)$$

où on a posé:

$$\nu(\varepsilon) \triangleq \frac{1}{\delta}\,[(t_1+t_2)w^* - \langle p^*, x^f-x^i\rangle - \tilde{x}_0^1(t_1) - \tilde{x}_0^2(t_2)].$$

Remarquons qu'effectivement $\nu(\varepsilon)$ est indépendant de t_f. ■

C'est la propriété établie par ce théorème qui constitue la propriété de "Turnpike". On voit que, sous les hypothèses faites, la solution d'un problème de commande optimale avec instant terminal et état terminal fixés définira un tronçon de trajectoire qui aura tendance à se rapprocher de l'ensemble des points de Von Neumann et ne s'en éloignera vraisemblablement qu'en début et en fin de période. Evidemment cette propriété suggère que lorsque l'horizon tend vers l'infini, une trajectoire optimale devra tendre en un certain sens

vers l'ensemble F. Le cas qui nous intéressera particulièrement sera celui où F se réduit au seul point $y^* \triangleq (x^*,0,w^*)$. Nous dirons alors que le système *est régulier*.

Exemple 3.2: Considérons le système défini dans l'exemple 3.1 et complétons le de la façon suivante:

$$\dot{x}_i = u_i - \rho_i x_i, \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$\dot{x}_0 = W(u_0)$$

$$x \triangleq \{x_i\}_{i=1,\ldots,n} \geq 0$$

$$u \triangleq \{u_i\}_{i=0,\ldots,n} \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} u_i \leq \phi(x) \tag{3.7}$$

où $W : R \to [0,\infty)$ est une fonctionnelle concave croissante vérifiant:

$$W(0) = 0. \tag{3.8}$$

Nous savons déjà que ce système vérifie les hypothèses 3.3 et 3.4. Définissons l'ensemble X comme un hypercube:

$$0 \leq x_i \leq a, \quad i = 1,\ldots,n$$

il est alors facile de vérifier que, la fonctionnelle ϕ étant concave, l'ensemble de transformation Δ est convexe et compact. De plus, s'il existe x tel que $\phi(x)$ soit strictement positif, l'ensemble Ω^+ aura un intérieur non vide. L'hypothèse 3.1 sera donc vérifiée. L'hypothèse 3.2 est une conséquence directe des propriétés de W et des relations (3.7) et (3.8).

Nous pouvons donc dire, pour ce système, que si x^i et x^* sont des états expansibles et si x^f et x^* sont des états non saturés l'hypothèse 3.5 sera vérifiée. (L'existence d'une solution pour le problème de commande optimale est assurée par le théorème d'existence donné par E.B. Lee et L. Markus (1967).)

3.4. Conclusion

Nous avons établi que, sous des hypothèses assez larges un état saturé est accessible en un temps fini à partir d'un état expansible.

Nous avons aussi montré que la solution d'un problème de commande optimale sur un horizon fini aura un comportement tel que le chemin dans l'espace d'état tende "à se rapprocher" de l'ensemble des points de Von Neumann. Les hypothèses de convexité nécessaire à l'établissement de ces résultats sont couramment faites dans les modèles de croissance économique.

CHAPITRE 4: CONVERGENCE D'UNE TRAJECTOIRE I-OPTIMALE VERS UN ETAT EXTREMAL STATIONNAIRE. CONDITIONS SUFFISANTES D'I-OPTIMALITE ET THEOREME D'EXISTENCE

Plan:

4.1 Propriétés de convergence.

4.2 Conditions suffisantes d'I-optimalité.

4.3 Théorème d'existence d'une trajectoire I-optimale.

4.4 Application à un modèle de croissance économique optimale.

4.5 Conclusion.

Introduction

Dans ce dernier chapitre nous étudierons certaines propriétés caractéristiques de trajectoires I-optimales pour des systèmes de commande satisfaisant à certaines des hypothèses mentionnées au Chapitre 3. La première propriété concerne le comportement asymptotique d'une trajectoire I-optimale. Nous établirons que pour un système régulier, toute trajectoire I-optimale converge vers l'état stationnaire extrémal. Ce résultat est fort utile car il complète les conditions nécessaires d'optimalité fournies par le théorème 2.1. Dans la section suivante nous étendrons les conditions suffisantes d'optimalité de O.L. Mangasarian (1966). Ce résultat nous permettra alors d'établir un théorème d'existence d'une trajectoire optimale pour une certaines classe de systèmes qui recouvre en particulier la plupart des modèles macroéconomiques de croissance optimale d'inspiration néo-classique. Un exemple de modèle de ce type concluera donc cette étude.

4.1. Propriétés de convergence

Nous établirons dans cette section que, pour un système régulier vérifiant les hypothèses 3.1 et 3.2, une trajectoire I-optimale $\underset{\sim}{\tilde{x}}^*$ issue de (t_i, x^i) définira un chemin $\tilde{x}^*$ tel que:

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{x}^*(t) = x^*$$

pourvu que *l'état stationnaire extrémal* x^* soit accessible à partir de x^i. Cette propriété sera établie comme corollaire d'un résultat plus général:

Théorème 4.1: Sous les hypothèses 3.1 et 3.2 et si le système est régulier, une trajectoire $\underset{\sim}{\tilde{x}}$ issue de (t_i, x^i) et telle que:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_i}^{t} \left[\frac{d}{dt} \tilde{x}_0(\tau) - w^*\right] d\tau > -\infty \tag{4.1}$$

vérifie nécessairement:

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{x}(t) = x^*. \tag{4.2}$$

Démonstration: La démonstration de ce résultat est donnée par A. Haurie, (1974), Théorème 2.2. Nous reprendrons cette démonstration ici pour l'adapter aux notations de cet ouvrage.

Supposons donc que la propriété (4.2) ne soit pas vérifiée. On aura alors:

$$\exists\ \varepsilon > 0,\ \forall\ t > t_i,\ \exists\ \tau > t \quad \text{t.q.} \quad \|\tilde{x}(\tau) - x^*\| > 2\varepsilon. \tag{4.3}$$

Puisque le système est régulier on aura:

$$\forall\ t > t_i \quad \{\tau \in [t_i,t] : \|\tilde{x}(\tau)-x^*\| > \varepsilon\} \subset \mathcal{M}(\varepsilon;t_i,t).$$

Comme l'ensemble de transformation Δ est compact, la fonction $\tilde{x}$ est à variation bornée sur tout intervalle fermé $[t_i,t]$ et pour une telle fonction vérifiant (4.3) on peut établir que l'on a:

$$\lim_{t\to\infty} \mu[\{\tau \in [t_i,t] : \|\tilde{x}(\tau)-x^*\| > \varepsilon\}] = \infty \tag{4.4}$$

et donc aussi:

$$\lim_{t\to\infty} \mu[\mathcal{M}(\varepsilon;t_i,t)] = \infty.$$

La propriété (4.4) se vérifie en considérant un instant t_n tel que:

$$\|\tilde{x}(t_n)-x^*\| > 2\varepsilon \tag{4.5}$$

et en définissant t_n' par:

$$t_n' = \mathrm{Inf}\{t > t_n : \|\tilde{x}(t)-x^*\| \leq \varepsilon\}.$$

Comme $\tilde{x}$ est à variations bornées il existe une borne inférieure σ, positive, à la différence:

$$t_n' - t_n.$$

Selon (4.3), on peut définir une suite d'instants $\{t_n\}_{n\in N}$ vérifiant (4.5) et on aura donc:

$$\lim_{t\to\infty} \mu[\{\tau \in [t_i,t] : \|\tilde{x}(\tau)-x^*\| > \varepsilon\}] > \lim_{n\to\infty} n\sigma$$

ce qui établit (4.4).

De façon similaire à ce qui a été établi dans la démonstration du théorème 3.3 on a comme conséquence du corollaire 3.1 (lemme d'Atsumi):

$$\forall\ t > t_i,\ \tilde{x}_0(t) < (t-t_i)w^* - \langle p^*, \tilde{x}(t)-\tilde{x}(t_i)\rangle - \delta\mu[\Theta(\varepsilon;t_i,t_f)]$$

c'est-à-dire, puisque Δ est compact et d'après (4.4):

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_i}^{t} \left(\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau)-w^*\right)d\tau < -\delta \lim_{t\to\infty} \mu[\Theta(\varepsilon;t_i,t_f)] = -\infty$$

ce qui contredit (4.1) et établit le théorème. ■

Corollaire 4.1: Si l'état stationnaire extrémal x^* est accessible en un temps T à partir de (t_i,x^i) et si les hypothèses du théorème 4.1 sont satisfaites, une trajectoire I-optimale $\tilde{x}^*$ issue de (t_i,x^i) vérifiera nécessairement:

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{x}^*(t) = x^*. \tag{4.6}$$

Démonstration: cf. A. Haurie (1974), corollary 2.1. ■

4.2. Conditions suffisantes d'I-optimalité

O.L. Mangasarian (1966) a donné des conditions suffisantes pour le problème de commande optimale sur un horizon fini qui sont couramment utilisées dans les travaux économiques (cf. K.J. Arrow et M. Kurz (1969)). Nous étendrons ce résultat au problème de commande optimale sur un horizon infini. Ces conditions sont basées sur le

principe du maximum; toujours par souci de simplification des écritures nous nous restreindrons au cas où U(x) est indépendant de x. Tous ces résultats s'étendraient facilement à un cas plus général, pourvu que les hypothèses sur l'ensemble U(x) permettent d'établir un principe du maximum (cf. K.J. Arrow (1968)).

Théorème 4.2: Soit $\tilde{\underset{\sim}{x}}^{\dagger}$ une trajectoire issue de (t_i, x^i), engendrée par la commande admissible $\tilde{u}^{\dagger}$, p_0 un réel positif, et $p(\cdot) : [t_i, \infty) \to E^n$ une fonction vérifiant:

$$\text{(i)} \quad \dot{p}(t) = - \frac{\partial H}{\partial \xi} [\xi, \tilde{u}^{\dagger}(t), p_0, p(t)] \Big|_{\xi = \tilde{x}^{\dagger}(t)} \tag{4.7}$$

$$\text{(ii)} \quad \left.\begin{array}{l} H[\tilde{x}^{\dagger}(t), \tilde{u}^{\dagger}(t), p_0, p(t)] \geq \\ H[\tilde{x}^{\dagger}(t), u, p_0, p(t)] \\ \forall\, u \in U \quad \text{et} \quad \forall\, t \in [t_i, \infty) \end{array}\right\} . \tag{4.8}$$

Sous les hypothèses du théorème 4.1, si la fonction $H^{\dagger}: (x,t) \to H^{\dagger}(x,t)$ définie par:

$$H^{\dagger}(x,t) \triangleq \operatorname*{Max}_{u \in U} \{p_0 f_0(x,u) + \langle p(t), f(x,u) \rangle$$

est concave en x; s'il existe une suite monotone croissante $\{t_n\}_{n \in N}$ telle que:

$$\limsup_{n \to \infty} \|p(t_n)\| < \infty, \quad \lim_{n \to \infty} t_n = \infty \tag{4.9}$$

et si l'on a:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_i}^{t} \left[\frac{d}{dt}\, \tilde{\underset{\sim}{x}}_0^{\dagger}(\tau) - w^*\right] d\tau > -\infty \qquad (4.10)$$

alors la trajectoire $\tilde{\underset{\sim}{x}}^{\dagger}$ est I-optimale.

Démonstration: Supposons que $\tilde{\underset{\sim}{x}}^{\dagger}$ ne soit pas I-optimale, alors il existe une trajectoire $\tilde{\underset{\sim}{x}}$ issue de (t_i, x^i), engendrée par une commande admissible $\tilde{u}$ et vérifiant:

$$\exists\ \varepsilon > 0,\ \exists\ T > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall\ t > T,\ \ \tilde{x}_0(t) > \tilde{x}_0^{\dagger}(t) + \varepsilon. \qquad (4.11)$$

De (4.10) et (4.11) on déduit que l'on aura aussi:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_i}^{t} \left[\frac{d}{dt}\, \tilde{x}_0(\tau) - w^*\right] d\tau > -\infty$$

et donc, d'après le théorème 4.1:

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{x}(t) = \lim_{t\to\infty} \tilde{x}^{\dagger}(t) = x^*. \qquad (4.12)$$

Puisque $H^{\dagger}$ est concave en x on aura:

$$H^{\dagger}(x,t) \le H^{\dagger}(\tilde{x}^{\dagger}(t),t) + \left\langle x - \tilde{x}^{\dagger}(t),\ \left.\frac{\partial H}{\partial \xi}\right|_{\xi=\tilde{x}^{\dagger}(t)} \right\rangle$$

$$\forall\ t \in [t_i, \infty),\ \ \forall\ x \in X.$$

En utilisant (4.11) et en appliquant cette relation au chemin $\tilde{x}$ on aura:

$$p_0\{f_0[\tilde{x}^+(t),\tilde{u}^+(t)] - f_0[\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)]\} \geq \frac{d}{dt}\langle \tilde{x}(t)-\tilde{x}^+(t),p(t)\rangle$$

$$\forall\ t \in [t_i,\infty).$$

En intégrant entre t_i et t on obtient:

$$\forall\ t \in [t_i,\infty) \quad p_0[\tilde{x}_0^+(t)-\tilde{x}_0(t)] \geq \langle \tilde{x}(t)-\tilde{x}^+(t),p(t)\rangle .$$

Considérons maintenant la suite croissante $\{t_n\}_{n\in N}$, on aura d'après (4.9) et (4.12):

$$\lim_{n\to\infty} [\tilde{x}_0^+(t_n)-\tilde{x}_0(t_n)] \geq 0, \quad \lim_{n\to\infty} t_n = \infty$$

or ce dernier résultat est en contradiction avec (4.11), donc $\tilde{\underset{\sim}{x}}^+$ est I-optimale. ■

4.3. Théorème d'existence d'une trajectoire I-optimale

Pour établir l'existence d'une trajectoire I-optimale nous procéderons de la façon suivante: tout d'abord nous montrerons que pour la classe de systèmes que nous considérons il existe une trajectoire F-optimale qui converge vers x*, en second lieu nous montrerons que les conditions suffisantes d'I-optimalité sont vérifiées sous des hypothèses additionnelles assez larges.

Théorème 4.3: Sous les hypothèses du corollaire 4.1:

(i) Il existe une suite $\{t_n\}_{n\in N}$ tendant vers l'infini et une famille de trajectoires:

$$\{\tilde{\underset{\sim}{x}}^n\}_{n\in N},\quad \tilde{\underset{\sim}{x}}^n : [t_i,\infty) \to E^{n+1}$$

où le tronçon fini correspondant à la restriction de $\tilde{\underset{\sim}{x}}^n$ sur $[t_i,t_n]$ est solution du problème de commande optimale:

$$\begin{cases} \text{Max } x_0(t_n) \\ \dot{x} = f(x,u) \\ \dot{x}_0 = f_0(x,u) \\ x \in X,\quad u \in U(x) \\ x(t_i) = x^i,\quad x(t_n) = x^*. \end{cases}$$

(ii) On peut extraire de la suite $\{\tilde{\underset{\sim}{x}}^n\}_{n\in N}$ une suite qui converge vers une limite $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ suivant la topologie de *convergence uniforme sur tout intervalle fini*. De plus on aura:

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_0^n = \tilde{x}_0^*.$$

(iii) La trajectoire $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ est F-optimale.

Démonstration: cf. A. Haurie (1974), théorème 2.4. ■

Hypothèse 4.1: Soit K(x*,t) l'ensemble des états accessibles à l'instant t sur des chemins admissibles issus de (0,x*). Nous supposerons qu'il existe une boule ouverte:

$$B(x^*,\varepsilon) \subset E^n$$

et un nombre réel positif θ tel que:

$$B(x^*,\varepsilon) \subset \bigcup_{t\in[0,\theta]} K(x^*,t). \quad \blacksquare$$

Nous établirons le résultat suivant:

Lemme 4.1: Sous les hypothèses du corollaire 4.1 et si l'hypothèse 4.1 est satisfaite alors une trajectoire F-optimale, $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$, issue de (t_i,x^i) et telle que:

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{x}^*(t) = x^*$$

vérifiera:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_i}^{t} \left\{\frac{d}{dt}\, \tilde{x}_0^*(t) - w^*\right\} dt > -\infty.$$

Démonstration: cf. A. Haurie (1974), lemme 2.2. $\blacksquare$

Nous avons établi qu'il existe une trajectoire F-optimale qui converge vers x^* et qui satisfait à la condition (4.10) du théorème 4.2; dans les prochains lemmes nous établirons que d'autres conditions du théorème 4.2 sont vérifiées.

Lemme 4.2: Sous les hypothèses du lemme 4.1, si $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ est une trajectoire F-optimale issue de (t_i,x^i) on peut toujours choisir une suite $\{t_n\}_{n\in N} \to \infty$ telle que l'on ait:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dt}\, \tilde{x}^*(t_n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dt}\, \tilde{x}_0^*(t_n) = w^*.$$

Démonstration: Considérons un instant $T \in [t_i,\infty)$ et le tronçon fini sur l'intervalle $[t_i,T]$. Si T est suffisamment grand nous aurons:

$$x^*(T) \in B(x^*,\varepsilon)$$

et sous ces conditions l'hypothèse 3.5 est vérifiée et le théorème 3.3 s'applique au tronçon fini considéré ainsi qu'à tout autre tronçon fini sur des intervalles $[t_i,T']$ avec $T' > T$.

Associons à la trajectoire $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ la fonction $\tilde{y}^* : [t_i,\infty) \to E^{2n+1}$ définie par:

$$\tilde{y}^*(t) \triangleq (\tilde{x}^*(t),f[\tilde{x}^*(t),\tilde{u}^*(t)],f_0[\tilde{x}^*(t),\tilde{u}^*(t)]).$$

Comme le système est régulier l'ensemble des points de Von Neumann, F, se réduit à un seul élément:

$$y^* \triangleq (x^*,0,w^*)$$

et la propriété de "Turnpike" établie par le théorème 3.3 assure que l'on a:

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \nu(\varepsilon),\ \forall\ T' > T$$

$$\mu[\{t \in [t_i,T'] : d(\tilde{y}^*(t),y^*) > \varepsilon\}] < \nu(\varepsilon).$$

Comme $\nu(\varepsilon)$ ne dépend pas de T' on peut considérer une suite décroissante, tendant vers 0, de valeurs pour ε, par exemple $\varepsilon = \frac{1}{n}$, et trouver une suite croissante $\{t_n\}_{n\in N} \to \infty$ telle que l'on ait:

$$\forall\ n \in N,\ d(\tilde{y}^*(t_n),y^*) \leq \frac{1}{n}$$

donc le lemme est établi. ■

Posons:

Hypothèse 4.2: L'état stationnaire extrémal x^* est *expansible* et est contenu dans l'intérieur de X et Ax^* n'a aucune composante nulle. ■

Alors nous établirons:

Lemme 4.3: Sous les hypothèses du lemme 4.1, et sous les hypothèses 3.4 et 4.2, si $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ est une trajectoire F-optimale issue de (t_i, x^i), qui converge vers x^*, engendrée par la commande admissible $\tilde{u}^*$ et si:

$$H^*(x,t) \triangleq \underset{u \in U}{\text{Max}}\, H(x,u,p_0,p(t)),\ t > t_i,\quad x \in X,$$

où $p : [t_i,\infty) \to E^n$ est la fonction définie par les conditions nécessaires de F-optimalité le long de $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$, définit une fonction concave en x, alors il existe une suite $\{t_n\}_{n\in N} \to \infty$ telle que l'on ait:

$$\limsup_{n\to\infty} \|p(t_n))\| < \infty.$$

Démonstration: Comme nous l'avons vu dans la démonstration du théorème 4.2, la concavité de $H^*(x,t)$ par rapport à x entraîne que l'on a:

$$p_0\{f_0[\tilde{x}^*(t),\tilde{u}^*(t)] - f_0[x,u]\} \geq$$

$$\frac{d}{dt}\langle x-x^*(t), p(t)\rangle,\quad \forall\, t \in [t_i,\infty),\quad \forall\, x \in X,\quad \forall\, u \in U$$

soit, en développant:

$$p_0 f_0[\tilde{x}^*(t),\tilde{u}^*(t)] + \langle p(t), f[\tilde{x}^*(t),\tilde{u}^*(t)] \rangle - \langle \frac{d}{dt} p(t), \tilde{x}^*(t) \rangle$$

$$\geq p_0 f(x,u) + \langle p(t), f(x,u) \rangle - \langle \frac{d}{dt} p(t), x \rangle ,$$

$$\forall\, t \in [t_i,\infty), \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, u \in U. \tag{4.14}$$

Posons:

$$M(t) \triangleq - \frac{d}{dt} p(t)$$

et

$$q(t) \triangleq \frac{(M(t),p(t),p_0)}{\| (M(t),p(t),p_0) \|} \triangleq (q_M(t),q_p(t),q_0(t)).$$

La relation (4.14) peut s'écrire alors:

$$q_0(t) f_0[\tilde{x}^*(t),\tilde{u}^*(t)] + \langle q_p(t), f[\tilde{x}^*(t),\tilde{u}^*(t)] \rangle + \langle q_M(t), \tilde{x}^*(t) \rangle$$

$$\geq q_0(t) f_0(x,u) + \langle q_p(t), f(x,u) \rangle + \langle q_M(t), x \rangle ,$$

$$\forall\, t \in [t_i,\infty), \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, u \in U. \tag{4.15}$$

Considérons maintenant une suite $\{t_n\}_{n\in N} \to \infty$ telle que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dt} \tilde{x}^*(t_n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dt} \tilde{x}_0^*(t_n) = w^*.$$

De la suite $\{q(t_n)\}_{n\in N}$, de vecteurs de norme unité on peut extraire une suite qui converge avec pour limite:

$$\bar{q} \triangleq (\bar{q}_M, \bar{q}_p, \bar{q}_0), \quad \|\bar{q}\| = 1.$$

Nous garderons, par souci de simplification, le même indice n pour représenter la suite extraite.

Si la suite $\{\|p(t_n\|\}_{n\in N}$ tendait vers l'infini, on aurait naturellement:

$$\bar{q}_0 = 0 \tag{4.16}$$

et donc, en passant à la limite dans (4.15):

$$\langle \bar{q}_M, x^* \rangle \geq \langle \bar{q}_p, f(x,u) \rangle + \langle \bar{q}_M, x \rangle, \quad \forall\, u \in U, \quad \forall\, x \in X. \tag{4.17}$$

Comme x^* est expansible, il existe $\hat{u} \in U$ tel que:

$$f(x^*, \hat{u}) > 0 \tag{4.18}$$

donc d'après (4.17):

$$\langle \bar{q}_p, f(x^*, \hat{u}) \rangle \leq 0. \tag{4.19}$$

Supposons que l'on doive avoir:

$$\bar{q}_p \geq 0 \tag{4.20}$$

de (4.18)-(4.20) on déduit que l'on a nécessairement:

$$\bar{q}_p = 0 \tag{4.21}$$

et dès lors (4.17) devient:

$$\langle \bar{q}_M, x-x^* \rangle \leq 0, \quad \forall\, x \in X. \tag{4.22}$$

Comme x* est contenu dans l'intérieur de X, (4.22) n'est possible que si l'on a:

$$\bar{q}_M = 0. \tag{4.23}$$

Donc, de (4.16), (4.20) et (4.23) on déduit que:

$$\bar{q} = 0$$

ce qui est contradiction avec le fait que $\bar{q}$ est de norme unité.

Donc on a nécessairement:

$$\limsup_{n\to\infty} \|p(t_n)\| < \infty.$$

Pour compléter la démonstration il faudrait établir que l'on a toujours:

$$\bar{q}_p \geq 0. \tag{4.20}$$

Selon l'hypothèse 3.4, puisque l'on a:

$$(x^*,0,w^*) \in \Omega$$

on a aussi:

$$(x^*,\dot{x},w^*) \in \Omega, \quad \forall\ \dot{x} \quad \text{t.q.} \quad 0 \leq \dot{x} \leq Ax^*$$

et (4.20) est alors une conséquence directe de (4.17) et du fait que Ax* n'a aucune composante nulle. ■

Le théorème suivant résumera ces résultats.

Théorème 4.4: Sous les hypothèses 3.1 et 3.2, 4.1 et 4.2, si le système est régulier et si x* est accessible à partir de x^i alors il existe une trajectoire I-optimale issue de x^i.

Démonstration: D'après le théorème 4.3 il existe une trajectoire F-optimale issue de x^i et telle que le chemin dans l'espace d'état converge vers x^*. D'après les lemmes 4.2 et 4.3 et le théorème 4.2 cette trajectoire est aussi I-optimale. ■

4.4. Application à un modèle de croissance économique optimale.

Nous considérerons un modèle récemment développé et étudié par H.M. Nguyen (1975) dans le cadre de la théorie de la croissance économique avec des ressources renouvelables. Nous renvoyons à cet ouvrage le lecteur désireux de savoir la signification économique des différentes hypothèses. Dans les paragraphes qui suivent nous montrerons que ce modèle se prête à une optimisation sur un horizon infini et que les propriétés de convergence vers le régime stationnaire extrémal sont vérifiées de façon globale. Ce résultat complétera ainsi l'étude locale réalisée par Nguyen.

4.4.1. Le modèle

Considérons les variables économiques suivantes:

$R \triangleq$ stock de la ressource renouvelable

$K \triangleq$ stock de capital

$I \triangleq$ investissement net

$E \triangleq$ récolte de la ressource renouvelable

$C \triangleq$ consommation

$Y \triangleq$ production

et les contraintes suivantes:

$$\dot{R} = G(R) - E \tag{4.21}$$

$$\dot{K} = I - \mu K \tag{4.22}$$

$$I + C \leq Y \triangleq F(K,E) \tag{4.23}$$

$$E \leq G(R) + \nu R \tag{4.24}$$

$$I \geq 0, \quad C \geq 0, \quad E \geq 0. \tag{4.25}$$

F est une fonctionnelle de classe C^2, concave et vérifiant en outre les hypothèses suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} \forall\ (K,E) > 0 \quad F(K,E) > 0 \\ \forall\ (K,E) > 0 \quad F'_K \geq 0;\ F''_{K^2} < 0;\ F'_E \geq 0;\ F''_{E^2} < 0;\ F''_{KE} > 0 \end{array}\right\} \tag{4.26}$$

$$\forall\ (K,E) > 0 \quad F(0,K) = F(K,0) = 0. \tag{4.27}$$

G est une fonctionnelle de classe C^1, concave ayant un maximum atteint en $R^* > 0$.

μ et ν sont des coefficients positifs constants.

Finalement considérons la variable d'accumulation d'utilité x_0 et son équation d'état:

$$\dot{x}_0 = C. \tag{4.28}$$

4.4.2. Vérification des hypothèses 3.1 et 3.2.

Nous ferons les hypothèses supplémentaires suivantes:

$$\exists\ \bar{R} > 0 \quad \text{t.q.} \quad G(0) = G(\bar{R}) = 0 \tag{4.29}$$

$$\forall\ \exists > 0 \quad \lim_{K\to 0} F'_K(K,E) = \infty; \quad \lim_{K\to\infty} F'_K(K,E) = 0 \tag{4.30}$$

et soit $\bar{E}$ tel que:

$$\bar{E} = \text{Max}\{G(R)+\nu R : R \geq 0\}.$$

Suivant (4.30) l'équation:

$$\mu K = F(K,\bar{E}) \tag{4.31}$$

a une solution unique, notée $\bar{K}$.

Définissons alors l'ensemble X par:

$$X \triangleq \{x \triangleq (R,K) : 0 \leq R \leq \bar{R}, 0 \leq K \leq \bar{K}\}.$$

Si nous rajoutons aux contraintes (4.21)-(4.25) la contrainte:

$$(R,K) \in X \tag{4.32}$$

il est aisé de constater que l'ensemble de transformation Δ est compact.

De plus, si on suppose que l'on a:

$$G'(0) < \nu \tag{4.33}$$

on peut vérifier que Δ est convexe, donc Ω aussi, que Ω^+ a un intérieur non vide et que l'hypothèse 3.2 est satisfaite.

Remarquons que la contrainte (4.32) est *naturelle*. En effet, si le stock de ressource R est supérieur à $\bar{R}$ il ne peut que décroitre; de même si le stock de capital K est égal à $\bar{K}$ la seule dépréciation de ce capital nécessite le réinvestissement de la production maximale (obtenue pour $E = \bar{E}$).

4.4.3. Ce système est régulier.

Considérons le problème d'optimisation en régime stationnaire:

$$\text{Max } C \tag{4.34}$$

$$0 = G(R) - E \tag{4.35}$$

$$C + \mu K \leq F(K,E) \tag{4.36}$$

$$C \geq 0, \quad E \geq 0, \quad E \leq \nu R + G(R). \tag{4.37}$$

Sous les hypothèses de concavité stricte faites sur G et F il existe une solution unique à ce problème définie par:

(R^*,K^*,C^*,E^*) et les multiplicateurs $p,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$

vérifiant les conditions du premier ordre:

$$\frac{\partial L}{\partial R^*} = \frac{\partial L}{\partial K^*} = \frac{\partial L}{\partial C^*} = \frac{\partial L}{\partial E^*} = 0$$

où L est le Lagrangien:

$$L(R,K,C,E,q,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \triangleq$$

$$C + q(G(R)-E) + \lambda_1(F(K,E)-\mu K-C) + \lambda_2 C + \lambda_3 E + \lambda_4(\nu R+G(R)-E)$$

ainsi que les relations de complémentarité:

$$\lambda_1(F(K,E)-\mu K-C) = 0$$

$$\lambda_2 C = \lambda_3 E = \lambda_4(\nu R-E) = 0.$$

Si nous supposons que la solution est à l'intérieur de l'ensemble de contrainte (4.37) elle devra vérifier:

$$\lambda_1 = 1 \tag{4.38}$$

$$G'(R) = 0 \tag{4.39}$$

$$F'_K(K,E) - \mu K = 0 \tag{4.40}$$

$$F'_E - q = 0. \tag{4.41}$$

On en déduit donc qu'il existe un régime stationnaire extrémal unique défini par:

$$\left.\begin{aligned} R &= R^* \\ E &= E^* \triangleq G(R^*) \\ K &= K^* \quad \text{t.q.} \quad F'_K(K^*,E^*) = \mu K \\ C &= C^* \triangleq F(K^*,E^*) - \mu K^* \end{aligned}\right\} . \qquad (4.42)$$

On constate que l'état stationnaire extrémal $x^* \triangleq (R^*,K^*)$ est intérieur à X, qu'il est expansible et non saturé mais que, cependant, il est impossible d'assurer une consommation C* avec des taux d'accumulation $(\dot{K},\dot{R}) > 0$.

Le système est donc régulier et vérifie l'hypothèse 4.2.

4.4.4. Accessibilité de x*.

Définissons la matrice:

$$A = - \text{Diag}(\nu,\mu)$$

alors les hypothèses 3.3 et 3.4 sont vérifiées. Dans ces conditions l'état stationnaire extrémal x* sera accessible en un temps fini T à partir d'un état initial $x^i = (R^i,K^i)$ *expansible*. En effet, selon le théorème 3.2, il suffit pour cela que x* soit non saturé, ce qui est vérifié.

4.4.5. Existence d'une solution I-optimale.

Le système étant régulier et satisfaisant aux hypothèses nécessaires, un chemin I-optimal issu d'un état expansible devra converger vers $x^* = (R^*,K^*)$.

D'après le théorème 4.4 il existera une trajectoire I-optimale, si l'hypothèse 4.1 peut être vérifiée, puisque $H^*(x,t)$ est concave en x.

L'application des conditions nécessaires d'optimalité du théorème 2.1 et de la propriété de convergence permettrait de calculer une trajectoire I-optimale (cf. Nguyen (1975) pour le détail de ces calculs).

5. Conclusion

Nous avons obtenu une théorie suffisamment complète de la commande optimale sur un horizon infini pour pouvoir s'appliquer à la plupart des modèles économiques de croissance optimale.

Une propriété de convergence d'un chemin I-optimal vers un régime stationnaire extrémal a été établie. Les conditions suffisantes d'optimalité de Mangasarian ont été étendues et ont permis de montrer qu'il existe une solution I-optimale.

Toutes ces propriétés sont établies sous des hypothèses de convexité courrамment rencontrées dans des modèles économiques.

A N N E X E

OPTIMIZATION ON AN INFINITE TIME HORIZON

par

Alain HAURIE

Rapport de recherche 74-08

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

Presented at the Naples meeting on "Optimization Problems in Engineering and Economics" December 16-20, 1974.

Abstract

This paper deals with the optimal control problem over an infinite time horizon. Two definitions of optimality are used and the convergence properties of optimal trajectories toward extremal stationary states are explored. An extension of Mangasarian's sufficient conditions is given. The application to optimal economic growth systems is emphasized.

Acknowledgements

The author wishes to thank Professors M.P. POLIS and P. YANSOUNI from "Ecole Polytechnique de Montréal" for their helpful comments.

This research has been supported by Canada Council (S730935), and DGES (FCAC).

1. Introduction.

A fairly general continuous time economic growth system could be described by the following model:

$$\dot{x} = \varphi(y,c) - \rho x \tag{1.1}$$

$$\phi(y,x) \geq 0 \tag{1.2}$$

$$(y,x,c) \geq 0 \tag{1.3}$$

$$\dot{x}_0 = f_0(c,x) \tag{1.4}$$

where $x \in E^n$ describes the physical stock of n goods, $y \in E^n$ is the output (production) of the economy, $c \in E^n$ is the consumption vector and $\rho > 0$ is a constant rate of natural decay (depreciation) of capital. $\phi : E^{2n} \to R$ is a concave functional and Eq. (1.2) describes the production opportunities in the economy. x_0 is the accumulated utility, $f_0 : E^{2n} \to R$ is a concave functional giving the rate of accumulation of utility. Eq. (1.1) describes the capital accumulation process. Starting with the earlier work of F. Ramsey [1] many economic models dealing with various aspects of economic growth have been cast in the form of Eqs. (1.1)-(1.4) (e.g. Refs. [2]-[10]).

If a finite time horizon T is considered, the maximization of $x_0(T)$ given an initial state x^i of the economy is an optimal control problem. However an infinite time horizon is often considered in economic growth models since (as said by K. Arrow and M. Kurz in [6]): ((*the infinite horizon is an idealization of the fundamental point*

that the consequences of investment are very long-lived; any short horizon requires some method of evaluating end-of-period capital stocks, and the only proper evaluation is their value in use in the subsequent future ›› .

Of course the optimal control problem over an infinite time horizon requires an extension of existing results. H. Halkin [11] showed recently that:

a) A maximum principle holds for some suitably defined optimality criterion over an infinite time horizon.

b) The transversality conditions do not hold in this maximum principle.

For discrete time economic growth models a more complete theory exists (e.g. [12]-[14]). One of the most interesting results is the so-called *Turnpike Property* which, stated loosely, says that an economy pursuing optimality over a sufficiently long period would spend most of the period performing nearly a steady state extremal path and would eventually converge to it on an infinite time. The first attempt to obtain similar results for continuous time model is given by T.C. Koopmans [15], followed by D. Cass [4]. However in both cases a one state variable model was used and the proofs depended heavily on this dimensionality assumption.

A general convergence property, proved for a class of systems encompassing most of the economic growth models used in the literature could circumvent the difficulty due to the absence of transversality conditions in Halkin's maximum principle. In this paper such a convergence

property is proved. It is shown that: a) under general convexity assumptions, optimal trajectories converge toward an extremal steady state. b) Sufficient conditions extending Mangasarian results [16] can be obtained. c) These results have important implications for numerical computation of optimal trajectories.

All the results are obtained for undiscounted utilities since, following Koopmans ([15], p. 239) ‹‹*we admit to an ethical preference for neutrality as between the welfare of different generations*››.

2. Optimal control over an infinite time horizon and convergence toward an extremal steady state.

2.1. I-optimality and F-optimality

We shall consider a system described by:

$$\dot{x} = f(x,u)$$

$$\dot{x}_0 = f_0(x,u)$$

$$x \in X \subset E^n,\ u \in U(x) \subset E^m$$

where $f : E^{n+m} \to E^n$ is continuous in u and continuously differentiable in x while $f_0 : E^{n+m} \to R$ is a functional, C^1 in x, continuous in u; n and m are given integers. x is the state variable, x_0 the accumulated utility. U(x) is the constraint set which will be assumed to be compact and continuously varying with x.

A trajectory $\tilde{\underset{\sim}{x}}$ emanating from (t_i,x^i) will be a pair $(\tilde{x}_0,\tilde{x})$ of function defined on $[t_i,\infty)$ such that

$$\tilde{x}(t) \in X, \quad \tilde{x}_0(t) \in R, \quad \forall\ t \in [t_i,\infty)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,\tilde{x}(t) &= f(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)) \\ \frac{d}{dt}\,\tilde{x}_0(t) &= f_0(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)) \end{aligned}\right\} \text{ almost everywhere on } [t^i,\infty)$$

$$\tilde{x}_0(t_i) = 0, \quad \tilde{x}(t_i) = x^i$$

for some measurable function $\tilde{u}$ verifying: $\tilde{u}(t) \in U(\tilde{x}(t))$, $\forall\ t \in [t_i,\infty)$.

$\tilde{u}$ will be called an admissible control generating an admissible trajectory $\underset{\sim}{\tilde{x}}$.

$\tilde{x}$ will be called a state path emanating from (t_i, x^i).

Two definitions of optimality over an infinite time horizon will be used.

Definition 2.1: (i) A trajectory $\underset{\sim}{\tilde{x}}^*$ emanating from (t_i, x^i) will be *F-optimal* if, for all $t_f \in [t_i, \infty)$ any trajectory $\underset{\sim}{\tilde{x}}^1$ such that:

$$\underset{\sim}{\tilde{x}}^1(t_i) = \underset{\sim}{\tilde{x}}^*(t_i) = (0, x^i)$$

and

$$\tilde{x}^1(t_f) = \tilde{x}^*(t_f)$$

verifies:

$$\tilde{x}_0^1(t_f) \leq \tilde{x}_0^*(t_f).$$

(ii) A trajectory $\underset{\sim}{\tilde{x}}^*$ emanating from (t_i, x^i) will be *I-optimal* if for all $t_f \in [t_i, \infty)$ any trajectory $\underset{\sim}{\tilde{x}}^1$ such that

$$\underset{\sim}{\tilde{x}}^1(t_i) = \underset{\sim}{\tilde{x}}^*(t_i) = (0, x^i)$$

verifies:

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ t > t_f \ \text{ s.t. } \ \tilde{x}_0^1(t) \leq \tilde{x}_0^*(t) + \varepsilon. \qquad \square$$

F-optimality refers to "finite-optimality" and means that the Bellman optimality principle holds on such a trajectory.

I-optimality is more restrictive and represents what is really needed as an operational optimality criterion over an infinite time horizon.

Halkin ([11]) proposed the concept of I-optimality and has shown that I-optimality implies F-optimality and that the maximum principle can be extended in the following form when $U(x) \equiv U \ \forall \ x \in X$:[†]

Theorem 2.1: If $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ is a finitely optimal trajectory emanating from (t_i, x^i) then there exists a non negative real number p_0 and a function $p: [t_i, \infty) \to E^n$ such that:

(i) $\| (p_0, p(t_i)) \| = 1$

(ii) $\dot{p}(t) = - \frac{\partial H}{\partial \xi} [\xi, \tilde{u}^*(t), p_0, p(t)] \Big|_{\xi = \tilde{x}^*(t)}$ almost everywhere on $[t_i, \infty)$.

(iii) $H[\tilde{x}^*(t), \tilde{u}^*(t), p_0, p(t)] \geq H[\tilde{x}^*(t), u, p_0, p(t)]$

$\forall \ u \in U \qquad \forall \ t \in [t_i, \infty)$;

where $H(\cdot)$ is the Hamiltonian

$$H(x, u, p_0, p(t)) \triangleq p_0 f_0(x, u) + \langle p(t), f(x, u) \rangle .$$

Note the absence of transversality conditions for this theorem and thus, the impossibility of characterizing optimal trajectories by this maximum principle. In the following it will be shown that under general convexity assumptions a convergence property of I-optimal trajectories allows us to circumvent this difficulty.

2.2. Fundamental lemmas

Definition 2.2: The *transformation set* (T.S.) is the subset Δ of E^{2n+1} defined by:

[†] The case where $U(x)$ depends on x necessitates more restrictive assumptions to yield a maximum principle.

$$y \triangleq (\xi,\eta,\gamma) \in \Delta \Rightarrow \exists\ \xi \in X, \quad \exists\ u \in U(\xi)$$

$$\text{s.t. } \eta = f(\xi,u) \quad \text{and} \quad \gamma = f_0(\xi,u).$$

The extended transformation set (E.T.S.) is the subset Ω of E^{2n+1} defined by:

$$y \in \Omega \Rightarrow \exists\ y' \in \Delta \text{ s.t. } \xi' = \xi,\ \eta' \geq \eta,\ \gamma' \geq \gamma.$$

The expansion set (E.S.) is the subset Ω^* of Ω defined by:

$$y \in \Omega^+ \Rightarrow y \triangleq (\xi,\eta,\gamma) \in \Omega \quad \text{and} \quad (\eta,\gamma) \geq 0. \qquad \square$$

Assumption 2.1: There exists a non singular matrix A such that:

(i) $x \in X,\ x \neq 0 \Rightarrow Ax < 0$

(ii) $x \in X,\ \dot{x} = f(x,u),\ u \in U(x)$ and $Ax \leq \dot{x}' \leq \dot{x} \Rightarrow \exists\ u' \in U(x)$

s.t. $\dot{x}' = f(x,u')$ and $f_o(x,u') \geq f_o(x,u)$ $\square$

In particular this assumption could be replaced by the more general one that if a positive growth $\dot{x} \geq 0$ is admissible at state x then a zero growth $\dot{x} = 0$ is also admissible.

Assumption 2.2: The T.S. Δ is compact, the E.T.S. Ω is convex and the E.S. Ω^+ has a non void interior. $\square$

Lemma 2.1: There exist $w^* \in R$ and $p^* \in E^n$ such that:

(i) $w^* = \text{Max}\{\gamma : y = (\xi,\eta,\gamma) \in \Omega^+\}$

(ii) $\forall\ y \in \Omega \quad \gamma + \langle p^*,\eta \rangle \leq w^*$ (2.1)

(iii) $\exists y^* \triangleq (x^*,0,w^*) \in \Delta.$

Proof: Δ is compact, thus by construction, Ω^+ is compact, hence w^* exists. Now it would be easy to verify that there exists a point $y^* \triangleq (x^*,\dot{x}^*,w^*)$ contained in $\partial\Delta$, the boundary of the T.S. By assumption 2.1 $\dot{x}^*$ can be taken as zero. The point $y^* = (x^*,0,w^*)$ is a boundary point of Ω. It is also a boundary point of the projection $\bar{\Omega}$ of Ω on the $\eta \times \gamma$ space:

$$\bar{\Omega} \triangleq \{(\eta,\gamma) : \exists\ \xi \in X \text{ s.t. } (\xi,\eta,\gamma) \in \Omega\}$$

Ω^+ having a non empty interior, the same is true for Ω and $\bar{\Omega}$. The separation theorem at $(0,w^*) \in \partial\bar{\Omega}$ gives:

$$\exists\ p^* \in E^n \text{ s.t. } \forall\ y \in \Omega\ \ \gamma + \langle p^*,\eta \rangle \leq w^*. \qquad \square$$

Corollary 2.1: Let F be the subset of Ω such that the equality holds in (2.1) then the following property holds:

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ s.t. } y \triangleq (x,\dot{x},\dot{x}_0) \in \Delta \text{ and } d(y,F) > \varepsilon$$

$$\Rightarrow \dot{x}_0 + \langle p^*,\dot{x} \rangle < w^* - \delta \qquad (2.2)$$

where $d(y,F)$ is the distance from y to F.

Proof: Assume that (2.2) is not true then there exists a sequence $\{y_n\}_{n\in N}$ in Δ such that:

$$d(y_n,F) > \varepsilon \quad \text{for all } n$$

and

$$\lim_{n\to\infty} \dot{x}_{0n} + \langle p^*,\dot{x}_n \rangle = w^*$$

where

$$y_n \triangleq (x_n, \dot{x}_n, \dot{x}_{0n}).$$

Since Δ is compact there exists a converging subsequence with limit $y' \in \Delta$ verifying:

$$d(y', F) \geq \varepsilon$$

$$\dot{x}'_0 + \langle p^*, \dot{x}' \rangle = w^*$$

i.e. $y' \notin F$ and $y' \in F$, this is a contradiction, (2.2) is true. □

The set F defined in Corollary 2.1 could be called the Von-Neumann Set (V.N.S.) following the classical terminology in economic growth theory (see Ref. [14]).

An interesting case occurs when F reduces to the single element $y^* \triangleq (x^*, 0, w^*)$. A system for which this property holds will be called *regular*. It is interesting to note that y^* is obtained as the solution of the steady state optimization problem:

$$\begin{cases} \underset{\substack{x \in X \\ u \in U(x)}}{\text{Max}} \; f_0(x,u) \\ \\ \text{subject to:} \\ \\ f(x,u) = 0 \quad . \end{cases}$$

The state x^* will be called *the extremal stationnary state* (E.S.S.).

2.2. Convergence properties

We shall prove that, for a regular system satisfying Assumptions 2.1-2.2 an I-optimal state path will converge necessarily toward the E.S.S. x^*, if this state is reachable from the initial state x^i. This result will be obtained as a corollary of the following more general theorem.

Theorem 2.2: If Assumptions 2.1 and 2.2 hold, if the system is regular and if a trajectory $\tilde{\underset{\sim}{x}}$ emanating from (t_i, x^i) is such that:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_i}^{t} \left[\frac{d}{dt}\tilde{x}_0(t) - w^*\right] dt > -\infty$$

then necessarily one has:

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{x}(t) = x^*.$$

Proof: Assume that the convergence property does not hold then:

$$\exists\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, t > 0, \quad \exists\, \tau > t \quad \text{s.t.} \quad \|\tilde{x}(\tau) - x^*\| > \varepsilon. \tag{2.4}$$

Since the T.S. Δ is compact the function $\tilde{x}$ is of bounded variations on any closed interval $[t_i, t]$. Consider the set:

$$\mathcal{D}(\varepsilon, t) \triangleq \{\tau \in [t_i, t] : \|\tilde{x}(\tau) - x^*\| > \varepsilon\}.$$

For a function $\tilde{x}$, of bounded variations and satisfying (2.4) it is easy to verify that one must have:

$$\lim_{t\to\infty} \mu[\Theta(\varepsilon,t)] = \infty$$

where $\mu[\cdot]$ denotes the Lebesgue measure.

Now define the function $\tilde{y} : [t_i,\infty) \to E^{2n+1}$ by:

$$\tilde{y}(t) \triangleq \left(\tilde{x}(t), \frac{d}{dt}\tilde{x}(t), \frac{d}{dt}\tilde{x}_0(t)\right)$$

and consider the set:

$$\Sigma(\varepsilon,t) \triangleq \{\tau \in [t_i,t] : \|\tilde{y}(\tau)-y^*\| > \varepsilon\}$$

of course one has $\Theta(\varepsilon,t) \subset \Sigma'(\varepsilon,t)$, therefore:

$$\lim_{t\to\infty} \mu[\Sigma(\varepsilon,t)] = \infty. \tag{2.5}$$

By Lemma 2.1 (ii) one has:

$$\forall\ t \in [t_i,\infty)\ \frac{d}{dt}\tilde{x}_0(t) + \langle p^*, \frac{d}{dt}\tilde{x}(t)\rangle \le w^*. \tag{2.6}$$

Integrating (2.6) between t_i and t and applying Corollary 2.1 one obtains:

$$\tilde{x}_0(t) < (t-t_i)w^* - \langle p^*, \tilde{x}(t)-\tilde{x}(t_i)\rangle - \delta\mu[\Sigma(\varepsilon,t)]. \tag{2.7}$$

Since the T.S. is compact, the second term in the R.H.S. of (2.7) is bounded and thus it is an easy consequence of (2.5) and (2.7) to verify that:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_i}^{t} \left(\frac{d}{dt}\tilde{x}_0(t)-w^*\right)dt = -\infty$$

which is a contradiction of (2.3). Therefore the property of convergence holds. □

Corollary 2.2: If x^* is reachable[(†)] from x^i in a finite time T, under Assumptions of Theorem 2.1 an I-optimal trajectory $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ necessarily verifies:

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{x}^*(t) = x^*.$$

Proof: It suffices to show that:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_i}^{t} \left(\frac{d}{dt}\tilde{x}_0^*(t) - w^*\right) dt > -\infty. \tag{2.8}$$

Assume (2.8) is false and consider a trajectory $\tilde{\underset{\sim}{x}}$ such that $\tilde{x}(T) = x^*$, $\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) \equiv 0$ for $t \geq T$. Of course one has:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_i}^{t} \left(\frac{d}{dt}\tilde{x}_0(t) - w^*\right) dt = \tilde{x}_0(T) - (T-t_i)w^* > -\infty. \tag{2.9}$$

---

† It could be shown (cf. Ref. [17]) that the reachability assumption will be satisfied if:

(a) $\exists\ u \in U(x^i)$ s.t. $f(x^i,u) > 0$

(b) $\exists\ u \in U(x^*)$ s.t. $f(x^*,u) > 0$,

(c) $\exists\ x > x^*$ and $u \in U(x)$ s.t. $f(x,u) > 0$.

By comparing (2.8) and (2.9) it is verified that:

$$\exists\ \tau > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall\ t > \tau \quad \tilde{x}_0^*(t) < \tilde{x}_0(t)$$

which contradicts the I-optimality of $\tilde{x}^*$. Therefore (2.8) holds and the convergence property is obtained. □

2.3. Sufficient conditions for I-optimality

Here the conditions under which a F-optimal trajectory is also I-optimal will be explored. The main result is an extension of Mangasarian sufficient condition for optimal control. First it will be shown that for a well conditioned problem a F-optimal trajectory converging to x^* satisfies (2.3), then the argument will closely follow the proof given in Ref. [16] for the finite time horizon problem.

Define $K(x^*,t)$ to be the set of all states at time t on every admissible path emanating from $(0,x^*)$.

Definition 2.3: We shall say that a neighborhood of x^* is strongly reachable if there exists an open ball $B(x^*,\varepsilon) \subset E^n$ and a real number $\theta > 0$ such that:

$$B(x^*,\varepsilon) \subset \bigcup_{t\in[0,\theta]} K(x^*,t).$$

Lemma 2.2: Assume that the system is regular, x^* is reachable from x^i and that a neighborhood of x^* is strongly reachable, then under

Assumptions 2.1 and 2.2 a F-optimal trajectory $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$, emanating from (t_i, x^i) and converging to x^* must satisfy:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_i}^{t} \left(\frac{d}{dt}\, \tilde{x}_0^*(t) - w^*\right) dt > -\infty. \tag{2.9}$$

Proof: It suffices to consider τ sufficiently large to have $\tilde{x}^*(\tau)$ in the neighborhood of x^* and to be able to construct a trajectory $\tilde{\underset{\sim}{x}}$ such that

$$\tilde{x}(t_i) = x^i$$

$$\tilde{x}(t) = x^* \quad \text{for} \quad t \in [t_1, t_2], \quad t_2 = \tau - \theta$$

$$\tilde{x}(\tau) = \tilde{x}^*(\tau)$$

which is assured by the strong reachability assumption. Thus, by the compactness of the T.S. Δ one has:

$$\lim_{\tau\to\infty} \int_{t_i}^{\tau} \left(\frac{d}{dt}\, \tilde{x}_0(t) - w^*\right) dt > -\infty. \tag{2.10}$$

Since, by definition of F-optimality one has:

$$\tilde{x}_0(\tau) \leq \tilde{x}_0^*(\tau) \tag{2.11}$$

(2.9) is obtained as a consequence of (2.10). □

Now the Mangasarian sufficient conditions can be extended.

Theorem 2.3: Let $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ be a F-optimal trajectory emanating from (t_i, x^i)

and converging to x*. Under the assumption of Lemma 2.2 and if the necessary conditions of Theorem 2.1 are such that:

(i) $H^*(x,\tau) \triangleq \underset{u\in U}{\text{Max}} \{p_0 f_0(x,u) + \langle p(\tau), f(x,u)\rangle\}$

defines a concave function of x.

(ii) There exists a sequence $\{t_n\}_{n\in N} \to \infty$ such that:

$$\limsup_{n\to\infty} \|p(t_n)\| < \infty$$

then $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ is an I-optimal trajectory.

Proof: If $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ is not I-optimal there exists a trajectory $\tilde{\underset{\sim}{x}}$ emanating from (t_i, x^i) and verifying:

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, T > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall\, t \geq T \quad \tilde{x}_0(t) > \tilde{x}_0^*(t) + \varepsilon. \tag{2.12}$$

By lemma 2.2 one has:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_i}^{t} \left(\frac{d}{dt}\tilde{x}_0^*(t) - w^*\right) dt > -\infty$$

and by (2.12) one has also

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_i}^{t} \left(\frac{d}{dt}\tilde{x}_0(t) - w^*\right) dt > -\infty$$

therefore, by Theorem 2.2 one has:

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{x}(t) = x^*.$$

Since $H^*(\cdot)$ is concave in x it verifies:

$$\forall\, x \in X,\ \forall\, t \in [0,\infty)\quad H^*(x,t) \le H^*(\tilde{x}^*(t),t) +$$

$$\left\langle x - \tilde{x}^*(t),\ \frac{\partial H}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=\tilde{x}^*(t)} \right\rangle . \tag{2.13}$$

Using the adjoint equation in the necessary conditions of Theorem 2.1 and (2.13) one has:

$$p_0\{f_0[\tilde{x}^*(t),\tilde{u}^*(t)] - f_0[\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)]\} \ge \frac{d}{dt}\ \langle \tilde{x}(t)-\tilde{x}^*(t),p(t)\rangle \tag{2.14}$$

where $\tilde{u}^*$ and $\tilde{u}$ are the admissible controls generating $\tilde{x}^*$ and $\tilde{x}$ respectively. Integrating (2.14) over $[t_i,t]$ one obtains:

$$p_0[\tilde{x}_0^*(t)-\tilde{x}_0(t)] \ge \langle \tilde{x}(t)-\tilde{x}^*(t),p(t)\rangle . \tag{2.15}$$

Since, by assumption, $\limsup_{n\to\infty} \|p(t_n)\|$ exists and $\tilde{x}$ and $\tilde{x}^*$ converge to x^* (2.15) yields:

$$\lim_{n\to\infty} [\tilde{x}_0^*(t_n)-\tilde{x}_0(t_n)] \ge 0,\quad \lim t_n = \infty. \tag{2.16}$$

(2.16) is in contradiction with (2.12), therefore $\tilde{x}^*$ is I-optimal. □

2.5. Implications for numerical computations.

The numerical computation of I-optimal trajectories will be

a delicate problem of approximation of the infinite horizon problem by a class of finite horizon problems. It will be shown here that a F-optimal trajectory converging to x^* can be approximated. If the sufficient conditions of Theorem 2.3 hold then this trajectory will also be I-optimal.

Theorem 2.4: Under Assumptions of Corollary 2.2: (i) There exists a sequence $\{t_n\}_{n\in N} \to \infty$ and a family of trajectories:

$$\{\tilde{\underset{\sim}{x}}^n\}_{n\in N} \qquad \tilde{\underset{\sim}{x}}^n : [t_i,\infty) \to E^{n+1}$$

where the restriction of $\tilde{\underset{\sim}{x}}^n$ to $[t_i,t_n]$ is the solution of the optimal control problem.

$$\begin{cases} \text{Max } \tilde{x}_0(t_n) \\ \dot{x} = f(x,u) \\ \dot{x}_0 = f_0(x,u) \\ x \in X,\ u \in U(x) \\ \tilde{x}(t_i) = x^i,\ \tilde{x}(t_n) = x^* \end{cases}$$

and $\tilde{x}^n(t) \equiv x^* \qquad \forall\ t \geq t_n$.

(ii) The sequence $\{\tilde{\underset{\sim}{x}}^n\}_{n\in N}$ has a converging subsequence with limit $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ in the topology of uniform convergence on finite intervals and:

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_0^n = \tilde{x}_0^*.$$

(iii) $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ is F-optimal.

Proof: Part (i) of the theorem is the existence theorem of Lee and Markus ([18]).

To establish (ii) we shall use the fact that, under the Assumptions made, the set of all trajectories generated by admissible controls is a compact subset of the Fréchet space of all continuous functions from $[t^i,\infty)$ to E^{n+1} with the topology of uniform convergence on finite intervals (see [19]). Thus, given the sequence $\{\tilde{\underset{\sim}{x}}^n\}_{n\in N}$ there exists a converging subsequence. Let's call $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ the limit trajectory.

Since one has, by (i):

$$\tilde{x}_0^n(t_{n+1}) \leq \tilde{x}_0^{n+1}(t_{n+1})$$

the sequence $\{\tilde{x}_0^n\}_{n\in N}$ converges to $\tilde{x}_0^*$. It remains to prove that $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ is F-optimal. It must be shown that, for all t_f, given the terminal state $\tilde{x}^*(t_f)$, $\tilde{x}_0^*(t_f)$ is the maximal utility for all admissible trajectories with terminal state $\tilde{x}(t_f) = \tilde{x}^*(t_f)$. This is obtained as a direct consequence of the continuous dependance of the maximum of the functional $\tilde{x}_0(t_f)$ on the terminal state. In fact $\tilde{x}_0^*(t_f)$ is the limit of the sequence $\{\tilde{x}_0^n(t_f)\}_{n\in N}$. For n sufficiently large $\tilde{x}_0^n(t_f)$ is maximal, given the terminal state $\tilde{x}^n(t_f)$. When n goes to infinity $\tilde{x}^n(t_f)$ converges to $\tilde{x}^*(t_f)$, therefore $\tilde{x}_0^*(t_f)$ is the desired maximum. □

3. Example

As a particular example of the general model described in section one consider the following system:

$$\dot{x}_0 = y_1 - I_1 - I_2 + \text{Log } y_2 \tag{3.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= I_1 - 0.05x_1 \\ \dot{x}_2 &= I_2 - 0.05x_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\leq \sqrt{x_1} \\ y_2 &\leq \sqrt{x_2} \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

$$\left.\begin{aligned} I_1 &\geq 0 \\ I_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

$$y_1 - I_1 - I_2 \geq 0 \tag{3.5}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Let $A \triangleq \begin{bmatrix} -0.05 & 0 \\ 0 & -0.05 \end{bmatrix}$, then for all $x \triangleq (x_1, x_2)$ verifying (3.6) Assumption 2.1 is satisfied. Assumption 2.2 will hold if the constraint set X is properly defined. Let it be defined by the following inequalities:

$$\sqrt{x_1} - 0.05x_1 \geq 0 \tag{3.7}$$

$$\sqrt{x_1} - 0.05x_2 \geq 0 \tag{3.8}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\ . \tag{3.9}$$

From (3.2), (3.5) it can be seen that

$$x \notin X \Rightarrow \dot{x} \leq 0,\quad \dot{x} \neq 0. \tag{3.10}$$

Furthermore, any state path $\tilde{x}$ emanating from (t_i,x^i), where $x^i \in X$, will verify:

$$\tilde{x}(t) \in X,\quad \forall\ t \in [t_i,\infty). \tag{3.11}$$

Thus X is a "trapping set" which could be a natural state domain for the study of the system (3.1)-(3.6) over an infinite time horizon.

From now on the system considered will be described by (3.1)-(3.8). With this new definition, it could be checked that:

(i) the T.S. Δ is compact

(ii) the E.T.S. Ω is convex

(iii) the E.S. Ω^+ has a non void interior

i.e. Assumption 2.2 is also verified.

The search for the E.S.S. x^* leads to the consideration of the following optimization problem:

$$\text{Max } w = y_1 - 0.05(x_1+x_2) + \log y_2 \tag{3.12}$$

under the constraints (3.3)-(3.6).

By Property (3.10) it is seen that all stationary states should lie in X.

The maximization problem (3.9), (3.3)-(3.6) has a unique solution:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1^* = 100 & y_1^* = 10 \\ x_2^* = 10 & y_2^* = \sqrt{10} \\ w^* = 4.5 + \tfrac{1}{2}\ \text{Log}\ 10 & \end{array}\right\} \qquad (3.13)$$

which is also the unique solution of the problem:

$$\text{Max}\{\gamma : (\xi,\eta,\gamma) \in \Omega^+\} \qquad (3.14)$$

hence the system is regular and corollary 2.2 holds: $x^* \triangleq (100,10)$ is reachable from any initial state $x^i \triangleq (x_1^i, x_2^i) \in X$, thus a I-optimal trajectory $\tilde{\underset{\sim}{x}}^*$ emanating from (t_i, x^i) should verify:

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{x}^*(t) = x^*. \qquad (3.15)$$

The maximum principle yields the following characterization of extremal controls

$$y_2 = \sqrt{x_2}$$

$$\begin{array}{lll} p_1 > p_2 > 1 & \Rightarrow & I_1 = y_1 = \sqrt{x_1} \\ p_2 > p_1 > 1 & \Rightarrow & I_2 = y_1 = \sqrt{x_1} \\ p_1 = p_2 > 1 & \Rightarrow & I_1 + I_2 = y_1 = \sqrt{x_1} \\ p_1 = p_2 = 1 & \Rightarrow & I_1 + I_2 \le y_1 = \sqrt{x_1} \\ p_2 < p_1 = 1 & \Rightarrow & I_1 \le \sqrt{x_1},\ \ I_2 = 0 \\ p_1 < p_2 = 1 & \Rightarrow & I_2 \le \sqrt{x_1},\ \ I_1 = 0 \\ p_1 < 1 \text{ and } p_2 < 1 & \Rightarrow & I_1 = I_2 = 0 \end{array}$$

where the p_i's variables are the costate variables associated to Eqs. (3.2). It is interesting to remark that a completely singular arc ($p_1=p_2\equiv 1$) is only possible for $x \equiv x^*$. This shows that a I-optimal trajectory should be constituted of a sequence of arcs, where either $I_1 = \sqrt{x_1}$ or $I_2 = \sqrt{x_1}$ or $I_1 + I_2 = \sqrt{x_1}$, leading from the initial state to the E.S.S. x^* followed by the completely singular arc $x \equiv x^*$.

We leave as a conjecture the possibility that an extremal state path $\tilde{x}$ reaches the E.S.S. in a minimal time. Of course an extremal trajectory having this form would satisfy the sufficient conditions of Theorem 2.3.

References

[1] F.P. RAMSEY. 1928. A mathematical theory of saving. *Economic Journal* 38: 543-559.

[2] K. SHELL edit. 1967. *Essays on the theory of optimal economic growth.* M.I.T. Press.

[3] D. CASS. 1965. Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation. *Review of Economic Studies* 32: 225-287.

[4] D. CASS. 1966. Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation: a Turnpike theorem. *Econometrica* 34: 833-850.

[5] C.C. VON WEIZSACKER. 1965. Existence of optimal programs of accumulation for an infinite time horizon. *Review of Economic Studies* 32: 85-103.

[6] K.J. ARROW and M. KURZ. 1970. *Public investment, the rate of return and optimal fiscal policy.* The John Hopkins Press.

[7] E. KEELER, M. SPENCE, R. ZECKHAUSER. 1971. The optimal control of pollution. *Journal of Economic Theory* 4: 19-34.

[8] J. PITCHFORD. 1972. Population and optimal growth. *Econometrica* 40: 103-136.

[9] A. HAURIE, M. POLIS, P. YANSOUNI. 1973. On optimal convergence to a steady-state-zero-growth economy with pollution and consumption control. *Proceedings IFAC/IFORS Conference on Dynamic Modelling and Control of National Economics.*

[10] A. HAURIE, M. POLIS, P. YANSOUNI. 1973. On the optimal control on an infinite time horizon of consumption, pollution and natural ressources use. *Proceedings 5th IFIP Conference on Optimization Techniques*. Springer-Verlag.

[11] H. HALKIN. 1972. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons. *Core Papers* no. 7210.

[12] H. ATSUMI. 1965. Neoclassical growth and the efficient program of capital accumulation. *Review of Economic Studies* 32: 127-136.

[13] D. GALE. 1967. Optimal development in a multisector economy. *Review of Economic Studies* 34: 1-18.

[14] L.W. McKENZIE. 1968. Accumulation programs of maximum utility and the Von Neumann facet. In *Value, Capital and Growth* (J.N. Wolfe, edit.) Aldine.

[15] T.C. KOOPMANS. 1965. On the concept of optimal economic growth. In *The Economic Approach to Development Planning*. North Holland.

[16] O.L. MANGASARIAN. 1966. Sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems. *SIAM Journal on Control* 4:139-152.

[17] A. HAURIE. 1973. Optimal control on an infinite time horizon: The Turnpike approach. Submitted to *Journal of Mathematical Economics*.

BIBLIOGRAPHIE

K.J. Arrow (1968), Applications of control theory to economic growth, in *Mathematics of the Decision Sciences*, G.B. Dantzig et A.F. Veinott, eds., A.M.S., Providence (R.I.) U.S.A.

K.J. Arrow et M. Kurz (1970), *Public investment, the rate of return and optimal fiscal policy*, John Hopkins Press.

H. Atsumi (1965), Neoclassical growth and the efficient programm of capital accumulation, *Review of Economic Studies* 32, pp. 127-136.

A. Blaquière et G. Leitmann (1967), On the geometry of optimal processes, in *Topics in Optimization*, G. Leitmann, ed., Academic Press.

E. Burmeister et A.R. Dobell (1970), *Mathematical theories of economic growth*, McMillan.

H. Halkin (1967), Mathematical foundations of system optimization, in *Topics in Optimization*, G. Leitmann, ed., Academic Press.

H. Halkin (1972), *Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons*, CORE Papers no. 7210, aussi dans *Econométrica* Vol. 42, no. 2, (1974), pp. 267-273.

A. Haurie (1974), Optimization on an infinite time horizon, CSEI Meeting on *Optimization Problems in Engineering and Economics* (Déc. 1974).

A. Haurie, M. Polis et P. Yansouni (1972), On optimal pollution and consumption control in a macroeconomic system, *Proceedings IEEE Conference on Decision and Control*.

A. Haurie, M. Polis et P. Yansouni (1973 a)), On optimal convergence to a steady-state-zero-growth economy with pollution and consumption control, *Proceedings IFAC/IFORS Conference on Dynamic Modelling and Control of National Economies*.

A. Haurie, M. Polis et P. Yansouni (1973 b)), On the optimal control, on an infinite planning horizon of consumption, pollution and natural resource use, *Proceedings 5th Conference on Optimization Techniques*, Springer-Verlag.

A. Haurie, M. Polis et P. Yansouni (1974), On the concept of optimality on an infinite time horizon: its application to the control of macroeconomic systems, *Proceedings International Conference on Systems, Man and Cybernetics, IEEE*.

E. Keeler, M. Spence et M. Zeckhauser (1971), The optimal control of pollution, *Journal of Economic Theory* Vol. 4, pp. 19-34.

S.C. Kolm (1969), La croissance et la qualité de l'environnement, *Analyse et Prévision* Vol. VIII, pp. 445-452.

T.C. Koopmans (1965), On the concept of optimal economic growth, in *The Econometric Approach to Development and Planning*, North Holland.

E.B. Lee et L. Markus (1967), *Foundations of optimal control*, John Wiley.

O.L. Mangasarian (1966), Sufficient conditions for the optimal control of non-linear systems, *SIAM Journal on Control* Vol. 4, pp. 139-152.

L.W. McKenzie (1968), Accumulation programms of maximum utility and the Von Neumann facet, in *Value Capital and Growth*, J.N. Wolf, ed., Chicago Press.

M.H. Nguyen (1975), *Essays on the optimal dynamic exploitation of natural resources and the social discount rate*, Ph.D. Thesis, Department of Political Economy, University of Toronto, Ontario, Canada.

J. Pitchford (1972), Population and optimal growth, *Econometrica* Vol. 40, pp. 109-137.

C.G. Plourde (1970), A simple model of replenishable natural resource exploitation, *Amer. Econ. Rev.* LX, no. 3, pp. 518-523.

L.S. Pontryagin et al. (1962), *The mathematical theory of optimal processes*, Interscience.

F.P. Ramsey (1928), A mathematical theory of saving, *Economic Journal* Vol. 38, pp. 543-559.